UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONÓMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Generalizaciones del Teorema de Korovkin

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
Osvaldo Aparicio Hernández

Dr. Francisco Javier Torres Ayala
Facultad de Ciencias, UNAM

Ciudad de México, Abril 2024

A mi madre, Lourdes Aparicio Loeza,
te dedico este trabajo con todo mi amor
y todas mis fuerzas. Gracias por ser una
madre ejemplar y un modelo a seguir.
TE AMO.

Índice

Presentación

Uno de los resultados fundamentales del Análisis Matemático es el Teorema de Aproximación de Weierstrass un resultado con muchas aplicaciones en varías áreas de las matemáticas. Y nuestro primer capítulo está dedicado a la demostración de este importantísimo teorema. La demostración de este teorema está basado en [1].

El Teorema de Aproximación de Weierstrass establece que cualquier función continua en un intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ se puede aproximar de manera uniforme por polinomios en dicho intervalo. El concepto clave y central de este teorema, y sobre todo de este trabajo, es el concepto de convergencia uniforme. En esta tesina se enuncian y demuestran resultados clásicos y algunos otros de gran interés, relacionados con la convergencia uniforme. Es importante que el lector este familiarizado con este concepto y que cuente con los conocimientos equivalentes a un curso de Análisis Real, un curso de Análisis Funcional y Análisis Complejo.

En el segundo capítulo se demuestran resultados que generaliza el Teorema Clásico de Korovkin, veánse los teoremas 2.4, 2.6 y 2.7, estos resultados son muy relevantes ya que apartir de ellos podemos demostrar otros resultados que son considerados clásicos en las matemáticas como es el Teorema de Aproximación de Weierstrass, el Teorema clásico de Korovkin y el Teorema de Fejer. Además de que en este trabajo se obtuvieron aplicaciones de gran interés en la probabilidad.

El tercer capítulo está dedicado a la demostración del Teorema de Fejer, comenzando con un breve repaso por conceptos claves, como lo son las series de fourier y el kernel de Dirichlet, viendo como se relacionan y desarrollando teoría y resultados que nos permite demostrar el Teorema de Fejer.

En conclusión, las generalizaciones del Teorema de Korovkin nos proporciona una nueva herramienta para establecer condiciones y obtener resultados que tienen que ver con la convergencia uniforme.

1. El Teorema de Aproximación de Weierstrass

En esta sección mostraremos las ideas originales de la prueba del Teorema de Aproximación de Weierstrass. Este teorema, que es sumamente importante, tiene muchas aplicaciones en varías áreas de las matemáticas, ya que los polinomios son funciones con una estructura muy sencilla de entender y estos pueden aproximarse a cualquier función continua (definidas en un intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$) por muy complicada que ésta sea.

Notación 1.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua y acotada, entonces para $h > 0$ definimos

$$S_h f(x) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{h}\right)^2} du.$$

En términos probabilísticos observamos que la función $S_h f(x)$ es la esperanza de la composición de la función f con una variable aleatoria normal con parámetros $\mu = x$ y $\sigma^2 = \frac{h^2}{2}$. Antes de demostrar el Teorema de Aproximacción de Weierstrass veamos el siguiente teorema.

Teorema 1.2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua y acotada. Entonces $S_h f$ converge uniformemente a f cuando $h \downarrow 0$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, entonces por la continuidad uniforma de f existe $\delta > 0$ tal que para toda $x, y \in \mathbb{R}$ con $|x - y| < \delta$ se sigue $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Supongamos que $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Usando el hecho de que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}$, se obtiene

$$\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{u-x}{h}\right)^2} du = 1.$$

Lo cual implica que podemos escribir

$$f(x) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\left(\frac{u-x}{h}\right)^2} du.$$

Sea $h_0 > 0$ tal que $h_0 < \frac{\varepsilon\delta\sqrt{\pi}}{2M}$, entonces

$$\begin{aligned}
|S_h f(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u) - f(x)| e^{-\left(\frac{u-x}{h}\right)^2} du \\
&= \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{|x-u|<\delta} |f(u) - f(x)| e^{-\left(\frac{u-x}{h}\right)^2} du \\
&\quad + \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{|x-u|\geq\delta} |f(u) - f(x)| e^{-\left(\frac{u-x}{h}\right)^2} du \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{|x-u|\geq\delta} |f(u) - f(x)| e^{-\left(\frac{u-x}{h}\right)^2} du \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{h\sqrt{\pi}} \int_{|x-u|\geq\delta} e^{-\left(\frac{u-x}{h}\right)^2} du \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{|v|\geq\frac{\delta}{h}} e^{-v^2} dv
\end{aligned}$$

Observamos que $\frac{\delta}{h}\chi_{|v|\geq\frac{\delta}{h}} \leq |v|\chi_{|v|\geq\frac{\delta}{h}}$, por lo tanto

$$\int_{|v|\geq\frac{\delta}{h}} e^{-v^2}dv \;=\; \frac{h}{\delta}\int_{|v|\geq\frac{\delta}{h}} \frac{\delta}{h}e^{-v^2}dv \leq \frac{h}{\delta}\int_{|v|\geq\frac{\delta}{h}} |v|e^{-v^2}dv.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |S_hf(x)-f(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{|v|\geq\frac{\delta}{h}} e^{-v^2}dv \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2Mh}{\delta\sqrt{\pi}}\int_{|v|\geq\frac{\delta}{h}} |v|e^{-v^2}dv \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{4Mh}{\delta\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} ve^{-v^2}dv = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2Mh}{\delta\sqrt{\pi}} < \varepsilon \end{aligned}$$

esto se cumple para toda $0 < h \leq h_0$ y para toda $x \in \mathbb{R}$.

□

Teorema 1.3. *(Teorema de Aproximación de Weierstrass)* Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces existe una sucesión de polinomios que converge uniformemente a f en $[a,b]$.

Demostración. Primero vamos a extender a f a una función uniformemente continua y acotada en $\mathbb{R}$ definiendo $f(x) = f(a)(x-a+1)$ en $[a-1,a)$, $f(x) = -f(b)(x-b-1)$ en $(b,b+1]$ y $f(x) = 0$ en $\mathbb{R}\setminus[a-1,b+1]$. Observamos que existe $R > 0$ tal que $f(x) = 0$ para $|x| > R$ y existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para toda x. Sea $\varepsilon > 0$, entonces por el Teorema anterior existe $h_0 > 0$ tal que para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene $|S_{h_0}f(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $f(u) = 0$ para $|u| > R$, entonces

$$S_{h_0}f(x) = \frac{1}{h_0\sqrt{\pi}}\int_{-R}^{R} f(u)e^{-\left(\frac{u-x}{h_0}\right)^2}du.$$

Por otro lado, la serie de potencias de e^{-v^2} converge uniformemente en $[\frac{-2R}{h_0},\frac{2R}{h_0}]$, entonces existe N tal que

$$\left|\frac{1}{h_0\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{u-x}{h_0}\right)^2} - \frac{1}{h_0\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{u-x}{h_0}\right)^{2k}\right| < \frac{\varepsilon}{4RM}$$

para toda $|x| \leq R$ y para toda $|u| \leq R$. Como en este caso $|u-x| \leq 2R$ implica

$$\begin{aligned} \left|S_{h_0}f(x) - \frac{1}{h_0\sqrt{\pi}}\int_{-R}^{R} f(u)\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{u-x}{h_0}\right)^{2k}du\right| &\leq \int_{-R}^{R}|f(u)|\frac{\varepsilon}{4RM}du \\ &\leq \int_{-R}^{R}\frac{\varepsilon M}{4RM}du = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

para toda $|x| \leq R$. Si definimos

$$P(x) := \frac{1}{h_0\sqrt{\pi}}\int_{-R}^{R} f(u)\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{u-x}{h_0}\right)^{2k}du.$$

Entonces $P(x)$ es un polinomio de grado a lo más $2N$ tal que $|S_{h_0}f(x)-P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $|x| \leq R$. Por lo tanto $|f(x)-P(x)| \leq |f(x)-S_{h_0}f(x)| + |S_{h_0}f(x)-P(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in [a,b]$.

□

2. Generalizaciones del Teorema de Korovkin

En esta sección mostraremos los resultados que generaliza el Teorema clásico de Korovkin, veánse los teoremas 2.4, 2.6 y 2.7. Está sección y la que sigue están basadas en el artículo [5]. Nuestra contribución fue generalizar el Teorema 2.1 de dicho artículo, donde se considera al espacio métrico un compacto y lo que hicimos es estudiar que tan flexible es dicha condición. Vimos que la compacidad puede ser remplazada por la propiedad de que nuestro espacio métrico sea acotado. Más aún, si tratamos de extenderlo a espacios métricos arbitrarios veremos que no se va acumplir para toda función continua, φ, pero sí, para funciones continuas crecientes, una restricción que vale la pena asumir.

Dado un espacio métrico (X,d). Denotamos por $\Pi(X)$ al conjunto de funciones uniformemente continuas y acotadas definidas en X y que toman valores en los reales. A $\Pi(X)$ se le puede dotar de una estructura de espacio vectorial junto con la norma del supremo, la norma del supremo la denotamos así $\|\cdot\|$.

Notemos que si (X,d) es un espacio métrico compacto, entonces el conjunto de funciones continuas definidas en X y que toman valores en los reales, denotado como $C(X)$, coincide con $\Pi(X)$, es decir $C(X) = \Pi(X)$. Algunos subespacios importantes de mencionar de $\Pi(X)$ son las funciones con soporte compacto y las funciones que se anulan en el infinito, veamos la definición de este último tipo de funciones.

Definición 2.1. Sea (X,d) un espacio métrico. Sea $f \in C(X)$ decimos que f se anula en el infinito si para toda $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto.

Pasemos a la definición de uno de los conceptos imprescindibles del análisis matemático, el concepto de bola abierta.

Definición 2.2. Sean (X,d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Definimos la bola abierta en X con centro en x_0 y radio ε como el conjunto

$$B_\varepsilon(x_0) := \{x \in X : d(x,x_0) < \varepsilon\}.$$

El complemento de un subconjunto A de X, lo denotaremos como A^c, es decir

$$A^c := \{x \in X : x \notin A\}.$$

Proposición 2.3. Las funciones que se anulan en el infinito son uniformemente continuas y acotadas.

Demostración. Sean $f \in C_0(X)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces el conjunto $K := \{x \in X : |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ es compacto.

Sea $x \in K$, entonces por la continuidad de f existe $\delta_x > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $d(y,x) < \delta_x$, es decir, si $y \in B_{\delta_x}(x)$.

Tenemos que $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{s_x}(x)$ donde $s_x := \frac{\delta_x}{2}$. Como K es compacto, existe $F \subseteq K$ finito tal que $K \subseteq \bigcup_{x \in F} B_{s_x}(x)$. Sea $\delta := \text{mín}_{x \in F}\{s_x\}$, claramente $\delta > 0$.

Sean $y,z \in X$ tal que $d(y,z) < \delta$. Entonces hay dos casos a considerar.

Caso 1. Supongamos sin pérdida de generalidad que $y \in K$. Entonces existe $x \in F$ tal que $y \in B_{s_x}(x)$. Demostremos que $z \in B_{\delta_x}(x)$.

En efecto, se tiene

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \delta + s_x \leq s_x + s_x = \delta_x$$

Es decir, $z \in B_{\delta_x}(x)$ y como $B_{s_x}(x) \subseteq B_{\delta_x}(x)$ implica que $y,z \in B_{\delta_x}(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(z)| &\leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Caso 2. Supongamos que $y,z \in K^c$. Entonces por definición de K, $|f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto,

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y)| + |f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es uniformemente continua. Por otro lado, como f es continua y K es compacto entonces f alcanza un máximo en K, es decir existe $x_0 \in K$ tal que $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ para toda $x \in K$ y si $x \in K^c$ entonces $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < |f(x_0)|$. Por lo tanto f es acotada. Y por la arbitraridad de $f \in C_0(X)$, concluimos que las funciones que se anulan en el infinito son uniformemente continuas y acotadas. Es decir $C_0(X) \subseteq \Pi(X)$. □

Ahora demostraremos las versiones que generalizan el Teorema clásico de Korovkin.

Teorema 2.4. Sea (X,d) un espacio métrico. Sea $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función continua *creciente* tal que $\varphi(t) > 0$ para $t > 0$. Sean $\{\mu_n^x\}_{n\in\mathbb{N},x\in X}$ una colección de medidas finitas de Borel en X. Definimos

$$\psi_n(x) := \int_X \varphi(d(x,y))d\mu_n^x(y)$$

para $x \in X$. Supongamos que se satisface:

i. $\mu_n^x(X) \to 1$ uniformemente en X cuando $n \to \infty$.

ii. $\psi_n(x) \to 0$ uniformemente en X cuando $n \to \infty$.

Entonces para toda $f \in \Pi(X)$ tenemos que

$$\int_X f(y)d\mu_n^x(y) \to f(x) \text{ uniformemente en } X \text{ cuando } n \to \infty.$$

Demostración. Sea $f \in \Pi(X)$ entonces como f es uniformemente continua, dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \eta$ si $d(x,y) < \delta$. Dado que φ es creciente, entonces para cada $x \in X$ tenemos

$$\varphi(\delta)\mu_n^x(B_\delta^c(x)) \leq \int_{B_\delta^c(x)} \varphi(d(x,y))d\mu_n^x(y) \leq \psi_n(x). \tag{1}$$

Tenemos,

$$\int_X f(y)d\mu_n^x(y) - f(x) = \int_X (f(y) - f(x))d\mu_n^x(y) + f(x)(\mu_n^x(X) - 1)$$

Esto implica que

$$\left| \int_X f(y)d\mu_n^x(y) - f(x) \right| \leq \int_X |f(y) - f(x)|d\mu_n^x(y) + \|f\||\mu_n^x(X) - 1|$$

Ahora tratemos de desarrollar $\int_X |f(y)-f(x)|d\mu_n^x(y)$.

$$\int_X |f(y)-f(x)|d\mu_n^x(y) = \int_{B_\delta(x)} |f(y)-f(x)|d\mu_n^x(y) + \int_{B_\delta^c(x)} |f(y)-f(x)|d\mu_n^x(y)$$

Por un lado

$$\int_{B_\delta(x)} |f(y)-f(x)|d\mu_n^x(y) \leq \eta\mu_n^x(B_\delta(x)) \leq \eta\mu_n^x(X) = \eta + \eta(\mu_n^x(X)-1)$$

Y por otro lado, como $\varphi(\delta) > 0$ ya que $\delta > 0$ tenemos por (1).

$$\int_{B_\delta^c(x)} |f(y)-f(x)|d\mu_n^x(y) \leq 2\|f\|\mu_n^x(B_\delta^c(x)) \leq \frac{2\|f\|}{\varphi(\delta)}\psi_n(x)$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \left|\int_X f(y)d\mu_n^x(y) - f(x)\right| &\leq \eta + \eta|\mu_n^x(X)-1| + \frac{2\|f\|}{\varphi(\delta)}\psi_n(x) + \|f\||\mu_n^x(X)-1| \\ &= \eta + \frac{2\|f\|}{\varphi(\delta)}\psi_n(x) + (\eta + \|f\|)|\mu_n^x(X)-1| \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ escojemos $\eta < \frac{\varepsilon}{3}$ y fijamos δ de la continuidad uniforme de f. Usando las hipótesis (i) y (ii), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $x \in X$ y para $n \geq N$ tenemos

$$\begin{aligned} (\eta + \|f\|)|\mu_n^x(X)-1| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ \frac{2\|f\|}{\varphi(\delta)}\psi_n(x) &\leq \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $x \in X$ y $n \geq N$ tenemos que

$$\left|\int_X f(y)d\mu_n^x(y) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

$\square$

Aunque a primera vista el solo considerar funciones en $\Pi(X)$ puede llegar a ser una condición algo restrictiva, recordemos que la aproximación que se da a dichas funciones es uniforme y que están definidas en un espacio métrico arbitrario, es decir, es una conclusión muy "fuerte".

Veamos en el siguiente ejemplo que el Teorema 2.4 no se cumple si $f \in C(X)$.

Ejemplo. 2.5. Consideremos a los números reales $\mathbb{R}$ con su métrica euclideana $|\cdot|$. Sea δ_x denota la medida de Dirac concentrada en $x \in \mathbb{R}$. Es decir, si $E \subseteq \mathbb{R}$, entonces

$$\delta_x = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Sean $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $p \in (0,1)$ definimos

$$\mu_n^x := p\delta_x + (1-p)\delta_{x+\frac{1}{n}}.$$

Es claro que

$$\mu_n^x(\mathbb{R}) = p + 1 - p = 1.$$

Es decir, se satisface la condición **(i)** del Teorema 2.4. Sea $\varphi(t) = t$, entonces

$$\psi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} |x-y| d\mu_n^x(y) = p(x-x) + (1-p)\left(x + \frac{1}{n} - x\right) = \frac{1-p}{n}$$

Por lo tanto $\psi_n(x) = \frac{1-p}{n}$ converge uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$. Por el Teorema 2.4 tenemos que para toda función $f \in \Pi(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) d\mu_n^x(y) = pf(x) + (1-p) f\left(x + \frac{1}{n}\right) \to f(x) \text{ uniformemente en } \mathbb{R} \text{ cuando } n \to \infty.$$

Por otro lado, sea $f(y) = y^2$, es claro que $f \in C(\mathbb{R})$ pero $f \notin \Pi(\mathbb{R})$. Definimos

$$\begin{aligned} f_n(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) d\mu_n^x(y) &= px^2 + (1-p)\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \\ &= x^2 + (1-p)\left(\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} |f_n(m) - f(m)| &= \left| m^2 + (1-p)\left(\frac{2m}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - m^2 \right| \\ &= (1-p)\left(\frac{2m}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \to \infty \text{ cuando } m \to \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que f_n no converge uniformemente a f en $\mathbb{R}$. Es decir, si $f \in C(X)$ no necesariamente se cumple el Teorema 2.4.

En nuestro Teorema 2.4, si queremos tener más flexibilidad en nuestra función φ, es decir, quitar la condición de que φ sea creciente, en este caso ahora tenemos que modificar el "tamaño"del espacio métrico (X,d) para que se siga valiendo el Teorema 2.4. Entonces otra variación del Teorema 2.4 es la siguiente.

Teorema 2.6. Sea (X,d) un espacio métrico *acotado*. Sea $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función continua tal que $\varphi(t) > 0$ para $t > 0$. Sean $\{\mu_n^x\}_{n\in\mathbb{N}, x\in X}$ una colección de medidas finitas de Borel en X. Definimos

$$\psi_n(x) := \int_X \varphi(d(x,y)) d\mu_n^x(y)$$

para $x \in X$. Supongamos que se satisface:

i. $\mu_n^x(X) \to 1$ uniformemente en X cuando $n \to \infty$.

ii. $\psi_n(x) \to 0$ uniformemente en X cuando $n \to \infty$.

Entonces para toda $f \in \Pi(X)$ tenemos que

$$\int_X f(y) d\mu_n^x(y) \to f(x) \text{ uniformemente en } X \text{ cuando } n \to \infty.$$

Demostración. La demostración es análoga al Teorema 2.4 con excepción de que la desigualdad (1) la vamos a remplazar por

$$\alpha(\delta)\mu_n^x(B_\delta^c(x)) \le \int_{B_\delta^c(x)} \varphi(d(x,y)) d\mu_n^x(y) \le \psi_n(x).$$

donde $\alpha(\delta) := \min_{t\in[\delta, diam(X)]} \varphi(t)$, observamos que $\alpha(\delta) > 0$ si $\delta > 0$. En el resto de la prueba se remplaza $\varphi(\delta)$ por $\alpha(\delta)$. $\square$

A partir del Teorema 2.6 se sigue el siguiente Teorema 2.7 que es el que nos sirve para demostrar las versiones de los Teoremas de Korovkin, el Teorema de Weierstrass y el Teorema de Fejer.

Teorema 2.7. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Sea $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función continua tal que $\varphi(t) > 0$ para $t > 0$. Sean $\{\mu_n^x\}_{n\in\mathbb{N},x\in X}$ una colección de medidas finitas de Borel en X. Definimos

$$\psi_n(x) := \int_X \varphi(d(x,y))d\mu_n^x(y)$$

para $x \in X$. Supongamos que se satisface:

i. $\mu_n^x(X) \to 1$ uniformemente en X cuando $n \to \infty$.

ii. $\psi_n(x) \to 0$ uniformemente en X cuando $n \to \infty$.

Entonces para toda $f \in C(X)$ tenemos que

$$\int_X f(y)d\mu_n^x(y) \to f(x) \text{ uniformemente en } X \text{ cuando } n \to \infty.$$

Demostración. Hacemos notar que un espacio métrico compacto es acotado y $\Pi(X) = C(X)$. □

2.1. Aplicación 1: Teorema de Aproximación de Weierstrass.

Sea $X = [0,1]$. Sea δ_x la medida de Dirac concentrada en $x \in X$.

Definimos, para $n \in \mathbb{N}$ y para $t \in [0,1]$,

$$\mu_n^t := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \delta_{\frac{k}{n}}$$

es decir, la hipótesis **i** se satisface trivialmente. Veamos que se satisface la condición **ii**.

$$\begin{aligned}
\int_X s d\mu_n^t(s) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= t\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-1-(k-1)} \\
[j = k-1] \quad &= t\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (1-t)^{n-1-j} \\
&= t(t+1-t)^{n-1} = t
\end{aligned}$$

Es decir, $\int_X s d\mu_n^t(s) = t$.

Afirmamos que $\int_X s^2 d\mu_n^t(s) = \frac{1}{n}((n-1)t^2+t)$.

$$\begin{aligned}
\int_X s^2 d\mu_n^t(s) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1} t^k(1-t)^{n-k} \\
[j=k-1] \quad &= \frac{t}{n}\left[\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\binom{n-1}{j} t^j(1-t)^{n-1-j}\right] \\
&= \frac{t}{n}\left[\sum_{j=0}^{n-1} j\binom{n-1}{j} t^j(1-t)^{n-1-j} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} t^j(1-t)^{n-1-j}\right] \\
&= \frac{t}{n}\left[\sum_{j=1}^{n-1} j\binom{n-1}{j} t^j(1-t)^{n-1-j} + 1\right] =: \mathbf{A}
\end{aligned}$$

Sea $\mathbf{B} := \sum_{j=1}^{n-1} j\binom{n-1}{j} t^j(1-t)^{n-1-j}$. Primero desarrollaremos $\mathbf{B}$.

Observamos que

$$j\binom{n-1}{j} = \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-1-j)!} = (n-1)\frac{(n-2)!}{(j-1)!(n-2-(j-1))!} = (n-1)\binom{n-2}{j-1}$$

Entonces;

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= (n-1)\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-2}{j-1} t^j(1-t)^{n-1-j} \\
&= (n-1)t\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-2}{j-1} t^{j-1}(1-t)^{n-2-(j-1)} \\
[m=j-1] \quad &= (n-1)t\sum_{m=0}^{n-2}\binom{n-2}{m} t^m(1-t)^{n-2-m} \\
&= (n-1)t
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{A} = \frac{t}{n}[\mathbf{B}+1] = \frac{t}{n}[(n-1)t+1] = \frac{1}{n}[(n-1)t^2+t]$$

Por lo tanto, $\int_X s^2 d\mu_n^t(s) = \frac{1}{n}[(n-1)t^2+t]$. Fin de la afirmación.

Sea $\varphi(t) = t^2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\psi_n(t) &= \int_X (t-s)^2 d\mu_n^t(s) \\
&= t^2\mu_n^t(X) - 2t\int_X s\,d\mu_n^t(s) + \int_X s^2 d\mu_n^t(s) \\
&= t^2 - 2t^2 + \frac{1}{n}[(n-1)t^2+t] = \frac{t-t^2}{n}
\end{aligned}$$

es decir, $\psi_n(t) = \frac{t-t^2}{n}$, observamos que $t-t^2 \leq \frac{1}{4}$ para toda $t \in [0,1]$, esto implica que $\psi_n(t) \leq \frac{1}{4n}$ para toda $t \in [0,1]$. Esto implica que $\psi_n(t) \to 0$ uniformemente en X cuando $n \to \infty$.

Por el Teorema 2.7, para toda $f \in C(X)$ se tiene

$$\int_X f(s)d\mu_n^t(s) \to f(t) \text{ uniformemente en } X \text{ cuando } n \to \infty$$

es decir, $B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \to f(t)$ uniformemente en X cuando $n \to \infty$. Las funciones $B_n(t)$ son los conocidos polinomios de Berstein. Esto demuestra el Teorema de Weierstrass, la cual establece que cualquier función continua en $[0,1]$ puede ser aproximada uniformemente en $[0,1]$ por una sucesión de polinomios.

Ahora demostremos el Teorema clásico de Korovkin.

2.2. Aplicación 2: Teorema Clásico de Korovkin.

Teorema 2.2.1. Sea $\{\mu_n^t\}_{t\in[0,1],n\in\mathbb{N}}$ una colección de medidas finitas de Borel en $[0,1]$ tal que

$$\int_{[0,1]} s^i d\mu_n^t(s) \to t^i \text{ uniformemente en [0,1] cuando } n \to \infty$$

para $i = 0,1,2$. Entonces para toda $f \in C[0,1]$ tenemos

$$\int_{[0,1]} f(s)d\mu_n^t(s) \to f(t) \text{ uniformemente en [0,1] cuando } n \to \infty.$$

Demostración. Para $i = 0$,

$$\int_{[0,1]} s^i d\mu_n^t(s) = \mu_n^t([0,1]) \to 1 \text{ uniformemente en [0,1] cuando } n \to \infty$$

Sea $\varphi(t) = t^2$, definimos

$$\begin{aligned}
\psi_n(t) &= \int_{[0,1]} (t-s)^2 d\mu_n^t(s) \\
&= t^2\mu_n^t([0,1]) - 2t\int_{[0,1]} s\,d\mu_n^t(s) + \int_{[0,1]} s^2 d\mu_n^t(s) \\
&\to t^2 - 2t^2 + t^2 = 0 \text{ uniformemente en } [0,1]
\end{aligned}$$

Se satisfacen las condiones de Teorema 2.7, entonces para toda $f \in C[0,1]$ se tiene

$$\int_{[0,1]} f(s)d\mu_n^t(s) \to f(t) \text{ uniformemente en [0,1] cuando } n \to \infty.$$

□

Teorema 2.2.2. *(Teorema clásico de Korovkin)* Sean $A_n : C[0,1] \to C[0,1]$ una sucesión de mapeos lineales positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n f_i - f_i\| = 0$$

donde $f_i(t) = t^i$ para $i = 0,1,2$. Entonces para cada $f \in C[0,1]$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n f - f\| = 0$$

Demostración. Para cada $t \in [0,1]$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $L_{t,n} : C(X) \to \mathbb{R}$ dada por $L_{t,n}(f) := (A_n f)(t)$ el cual es un funcional lineal positivo. Entonces por el Teorema de Representación de Riez (ref. Rudin [6]), existe μ_n^t medida de borel finita en $[0,1]$ tal que

$$L_{t,n}(f) = (A_n f)(t) = \int_{[0,1]} f(s)d\mu_n^t(s).$$

Por hipótesis tenemos que $\lim_{n\to\infty} \|A_n f_i - f_i\| = 0$ donde $f_i(t) = t^i$ para $i = 0,1,2$. Es decir, $\int_{[0,1]} f_i(s)d\mu_n^t(s) \to f_i(t)$ uniformemente en $[0,1]$ cuando $n \to \infty$ y con $i = 0,1,2$. Entonces por el Teorema 2.2.1, para toda $f \in C[0,1]$ tenemos

$$\int_{[0,1]} f(s)d\mu_n^t(s) \to f(t) \text{ uniformemente en [0,1] cuando } n \to \infty$$

Es decir, $\lim_{n\to\infty} \|A_n f - f\| = 0$. $\square$

2.3. Aplicación 3: Probabilidad.

Proposición 2.3.1. Para cada $x \in \mathbb{R}$, sea $\{Y_{x,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias, definidas en algún espacio de probabilidad, que satisfacen

a) para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathbb{E}(Y_{x,n}) = x$.

b) para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\mathrm{Var}(Y_{x,n}) \leq \alpha(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Entonces para toda $f \in \Pi(\mathbb{R})$ tenemos que

$$\mathbb{E}(f(Y_{x,n})) \to f(x) \text{ uniformente en } \mathbb{R} \text{ cuando } n \to \infty.$$

Demostración. Para cada $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ sea μ_n^x la distribución de $Y_{x,n}$. Tenemos que μ_n^x es una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$, es decir $\mu_n^x(\mathbb{R}) = 1$ por lo tanto se satisface la hipótesis **(i)** del Teorema 2.4.

Veamos que existe una función continua creciente $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\varphi(t) > 0$ si $t > 0$ y satisface la condición **(ii)**.

Sea $\varphi(t) = t^2$, entonces

$$\begin{aligned}
\psi_n(x) &= \int_{\mathbb{R}} (x-y)^2 d\mu_n^x(y) \\
&= x^2\mu_n^x(\mathbb{R}) - 2x\int_{\mathbb{R}} y d\mu_n^x(y) + \int_{\mathbb{R}} y^2 d\mu_n^x(y) \\
&= x^2 - 2x\mathbb{E}(Y_{x,n}) + \mathbb{E}(Y_{x,n}^2) \\
\text{por a)} &= -x^2 + \mathbb{E}(Y_{x,n}^2) \\
&= -x^2 + \mathrm{Var}(Y_{x,n}) + \mathbb{E}^2(Y_{x,n}) \\
\text{por a)} &= \mathrm{Var}(Y_{x,n}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\psi_n(x) = \mathrm{Var}(Y_{x,n}) \leq \alpha(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, es decir $\psi_n(x) \to 0$ uniformemente en $\mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$.

Entonces por el Teorema 2.4 tenemos que para toda $f \in \Pi(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)d\mu_n^x(y) \to f(x) \text{ uniformemente en } \mathbb{R} \text{ cuando } n \to \infty.$$

Es decir,

$$\mathbb{E}(f(Y_{x,n})) \to f(x) \text{ uniformemente en } \mathbb{R} \text{ cuando } n \to \infty.$$

□

Corolario 2.3.2. Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea $\{Z_{x,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatoria independientes e identicamente distribuidas (v.a.i.i.d.) con media x y varianza σ_x^2, tal que $\sup_{x\in\mathbb{R}} \sigma_x^2 < \infty$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{Z}_{x,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_{x,i}.$$

Entonces para toda $f \in \Pi(\mathbb{R})$ se tiene

$$\mathbb{E}(f(\overline{Z}_{x,n})) \to f(x) \text{ uniformemente en } \mathbb{R} \text{ cuando } n \to \infty.$$

Demostración. Sea $M := \sup_{x\in\mathbb{R}} \sigma_x^2 < \infty$. Por un lado,

$$\mathbb{E}(\overline{Z}_{x,n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Z_{x,i}) = \frac{1}{n}nx = x.$$

Es decir, se satisface la condición a) de la proposición anterior. Por otro lado, para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\mathrm{Var}(\overline{Z}_{x,n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(Z_{x,i}) = \frac{1}{n^2}n\sigma_x^2 \leq \frac{M}{n}.$$

Por lo tanto, para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\mathrm{Var}(\overline{Z}_{x,n}) \leq \frac{M}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, es decir se satisface la condición b) de la proposición anterior.

Por lo tanto se sigue de nuestra proposición anterior que para toda $f \in \Pi(\mathbb{R})$ se tiene

$$\mathbb{E}(f(\overline{Z}_{x,n})) \to f(x) \text{ uniformemente en } \mathbb{R} \text{ cuando } n \to \infty.$$

□

Ejemplo 2.3.3. Para $x \in \mathbb{R}$, sea $\{U_{x,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que

$$U_{x,n} \sim \mathrm{Unif}\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right),$$

es decir $U_{x,n}$ tiene distribución uniforme y continua en el intervalo $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$. Tenemos que

$$\mathbb{E}(U_{x,n}) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{n} + x + \frac{1}{n}\right) = x.$$

y

$$\mathrm{Var}(U_{x,n}) = \frac{\left(x + \frac{1}{n} - \left(x - \frac{1}{n}\right)\right)^2}{12} = \frac{1}{3n^2}.$$

Concluimos por la Proposición 2.3.1, para toda $f \in \Pi(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\mathbb{E}(f(U_{x,n})) \to f(x) \text{ uniformemente en } \mathbb{R} \text{ cuando } n \to \infty.$$

Es decir,

$$\frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(y)dy \to f(x) \text{ uniformente en } \mathbb{R} \text{ cuando } n \to \infty.$$

Ejemplo 2.3.4. Para $x \in \mathbb{R}$, sea $\{X_{x,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a.i.i.d. tal que

$$X_{x,n} \sim N(x, \sigma^2)$$

es decir $X_{x,n}$ tiene distribución normal con media x y varianza σ^2. Sea $\overline{X}_{x,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{x,i}$ no es díficil demostrar que $\overline{X}_{x,n} \sim N(x, \frac{\sigma^2}{n})$, veáse [3].

Por lo tanto, para toda $f \in \Pi(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{n(y-x)^2}{2\sigma^2}}dy \to f(x) \text{ uniformente en } \mathbb{R} \text{ cuando } n \to \infty.$$

Como observación tenemos que este último ejemplo proporciona otra demostración de nuestro Teorema 1.2.

3. El Teorema de Fejer

En esta sección demostraremos el Teorema de Fejer aplicando los teoremas de tipo Korovkin de la sección anterior.

Denotamos por $C_{per}[-\pi,\pi]$ al espacio de las funciones continuas con periodo 2π las cuales estan definidas en el intervalo $[-\pi,\pi]$ y que toman valores en los reales. Si $f \in C_{per}[-\pi,\pi]$, su transformada de fourier está dada por;

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

donde

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \text{para } k \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt, \text{para } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Observamos que para enteros negativos k, tenemos $a_k = a_{-k}, b_k = -b_{-k}$ y $b_0 = 0$.

Sea $\{s_n\}_n$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f, es decir;

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

y sea $c_k := \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$, donde $i^2 = -1$.

Definición 3.1. Definimos el kernel de Dirichlet como;

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}.$$

Vamos a reescribir la sumas parciales de Fourier de f en términos del kernel de Dirichlet.

Lema 3.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt.$$

Demostración. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2}(a_k - ib_k)(\cos(kx) + i\,\mathrm{sen}(kx)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \,\mathrm{sen}(kx)) + \frac{i}{2}\sum_{k=-n}^{n}(a_k \,\mathrm{sen}(kx) - b_k \cos(kx)) \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \,\mathrm{sen}(kx)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \text{ y} \tag{2}$$

$$\frac{i}{2}\sum_{k=-n}^{n}(a_k \,\mathrm{sen}(kx) - b_k \cos(kx)) = 0. \tag{3}$$

Recordemos que $a_k = a_{-k}, b_k = -b_{-k}$ y $b_0 = 0$, esto implica que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\operatorname{sen}(kx)) &= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{-1}(a_k\cos(kx)+b_k\operatorname{sen}(kx))+\frac{a_0}{2} \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\operatorname{sen}(kx)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_{-k}\cos(-kx)+b_{-k}\operatorname{sen}(-kx))+\frac{a_0}{2} \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\operatorname{sen}(kx)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\operatorname{sen}(kx))+\frac{a_0}{2} \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\operatorname{sen}(kx)) \\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\sum_{k=-n}^{n}(a_k\operatorname{sen}(kx)-b_k\cos(kx)) &= \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_{-k}\operatorname{sen}(-kx)-b_{-k}\cos(-kx))-i\frac{b_0}{2} \\
&\quad +\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k\operatorname{sen}(kx)-b_k\cos(kx)) \\
&= \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}(-a_k\operatorname{sen}(kx)+b_k\cos(kx))-i\frac{b_0}{2} \\
&\quad +\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k\operatorname{sen}(kx)-b_k\cos(kx)) \\
&= -\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k\operatorname{sen}(kx)-b_k\cos(kx))-i\frac{b_0}{2} \\
&\quad +\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k\operatorname{sen}(kx)-b_k\cos(kx)) \\
&= -i\frac{b_0}{2}=0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))=s_n(x).$$

Por otro lado, recordando que $c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(x-t)dt &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{ik(x-t)}dt \\
&= e^{ikx}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt \\
&= \sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt.$$

□

Como observación tenemos que f y D_n son funciones periódicas con periodo 2π, entonces por un simple cambio de variable obtenemos que

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt.$$

Lema 3.3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}(\frac{t}{2})} & \text{si } t \neq 2m\pi, m \in \mathbb{N}, \\ 2n+1 & \text{si } t = 2m\pi, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Además

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1.$$

Demostración. Si $t = 2m\pi$ con $m \in \mathbb{N}$, entonces por definición tenemos que $D_n(t) = 2n+1$. Sea $t \neq 2m\pi$ con $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$(e^{it}-1)D_n(t) = e^{i(n+1)t} - e^{-int}.$$

y si multiplicamos por $e^{-i\frac{t}{2}}$ por ambos lados de la igualdad tenemos por un lado,

$$e^{-i\frac{t}{2}}(e^{it}-1)D_n(t) = 2i\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)D_n(t)$$

y por otro lado,

$$e^{-i\frac{t}{2}}(e^{i(n+1)t} - e^{-int}) = 2i\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$

Por lo tanto,

$$D_n(t) = \frac{2i\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2i\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Por último tenemos que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1$ ya que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

□

Definición 3.4. Definimos el kernel de Fejér para un entero no negativo n, como :

$$K_n(t) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t).$$

Lema 3.5. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces los siguientes enunciados son válidos

i) Si $t \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{N}$,

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{1-\cos(n+1)t}{1-\cos t} = \frac{1}{n+1}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{(n+1)t}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} \geq 0.$$

ii)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1.$$

iii) Si $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$, entonces
$$0 \leq K_n(t) \leq \frac{1}{(n+1)\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}}.$$

Demostración. Tenemos
$$\begin{aligned}
(e^{-it}-1)(e^{it}-1)(n+1)K_n(t) &= (e^{-it}-1)(e^{it}-1)\sum_{k=0}^{n} D_k(t)\\
&= (e^{-it}-1)\sum_{k=0}^{n}(e^{i(k+1)t}-e^{-i(n+1)t})\\
&= \sum_{k=0}^{n}(e^{-it}-1)(e^{i(k+1)t}-e^{-i(n+1)t})\\
&= \sum_{k=0}^{n}(e^{ikt}-e^{-i(k+1)t}-e^{i(k+1)t}+e^{-ikt})\\
&= \sum_{k=0}^{n}(e^{ikt}-e^{i(k+1)t})+\sum_{k=0}^{n}(e^{-ikt}-e^{i(k+1)t})\\
&= 2-e^{i(n+1)t}-e^{-i(n+1)t}
\end{aligned}$$

Por la tanto,
$$\begin{aligned}
K_n(t) &= \frac{1}{n+1}\frac{2-e^{i(n+1)t}-e^{-i(n+1)t}}{(e^{-it}-1)(e^{it}-1)}\\
&= \frac{1}{n+1}\frac{2-2\cos(n+1)t}{2-2\cos t}\\
&= \frac{1}{n+1}\frac{1-\cos(n+1)t}{1-\cos t}\\
&= \frac{1}{n+1}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{(n+1)t}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}}
\end{aligned}$$

La última igualdad es por trigonometría elemental. Obervamos que $K_n(t) \geq 0$ y por lo tanto se cumple (i). Por el Lema 3.3 y por la definición de K_n se sigue (ii). Por último tenemos
$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{(n+1)t}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} \leq \frac{1}{(n+1)\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{(n+1)\operatorname{sen}^2\frac{|t|}{2}} \leq \frac{1}{(n+1)\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}}.$$

La última desigualdad se da ya que $\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}$ es creciente en $(0,\pi]$ y por lo tanto se cumple (iii). □

Definición 3.6. Sea $f \in C_{per}[-\pi,\pi]$, definimos la n-ésima media de Cesàro de la función f como
$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n+1}(s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_n(x)).$$

Recordando que s_n son las sumas parciales de la serie de Fourier se sigue que :
$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt. \tag{4}$$

La última igualdad se sigue del hecho de que f tiene periodo 2π y por un cambio de variable.

Teorema 3.7. *(Fejér)* Sea $f \in C_{per}[-\pi,\pi]$. Entonces $\sigma_n \to f$ uniformemente en $[-\pi,\pi]$.

Demostración. Por (4) basta demostrar que para cualquier función continua con periodo 2π definida en el intervalo $[-\pi,\pi]$, la sucesión de funciones

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)K_n(\theta-\tau)d\tau$$

converge uniformemente a $f(\theta)$ con $\theta \in [-\pi,\pi]$.

Consideremos el espacio métrico compacto $\mathbb{S}^1$, es decir el círculo unitario centrado en el origen equipado con la métrica euclideana. Para cualquier punto $x \in \mathbb{S}^1$ puede ser expresado como $x = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ donde $\theta \in [-\pi,\pi]$. Es claro que $C(\mathbb{S}^1)$ está en correspondecia biyectiva con $C_{per}[-\pi,\pi]$ por medio del mapeo $f \mapsto \tilde{f}$, donde

$$\tilde{f}(\theta) = f(x), \;\; x = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta).$$

Sean $x = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{S}^1$ y $n \in \mathbb{N}$ consideremos la medida μ_n^x que tiene por densidad a $\frac{1}{2\pi}K_n(\tau)$. Entonces para cualquier $x \in \mathbb{S}^1$ por el Lema 3.5. (ii) se cumple

$$\mu_n^x(\mathbb{S}^1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\tau)d\tau = 1.$$

Es decir μ_n^x es una medida de probabilidad en $\mathbb{S}^1$. Por lo tanto se satisface la hipótesis **(i)** del Teorema 2.7. Además se cumple que para toda $f \in C(\mathbb{S}^1)$

$$\int_{\mathbb{S}^1} f(y)d\mu_n^x(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\tau)K_n(\theta-\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta-\tau)K_n(\tau)d\tau. \tag{5}$$

Consideremos $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dada por $\varphi(t) = t^2$. Sean $x = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $y = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ puntos que pertenecen a $\mathbb{S}^1$, por geometría elemental tenemos

$$|x-y|^2 = 2 - 2\cos\theta\cos\tau - 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\tau.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\psi_n(x) &= \int_{\mathbb{S}^1} |x-y|^2 d\mu_n^x(y) \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta-\tau)d\tau - \frac{2\cos\theta}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\tau K_n(\theta-\tau)d\tau - \frac{2\operatorname{sen}\theta}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}\tau K_n(\theta-\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Observamos que el primer término del lado derecho de la igualdad es 2, por el Lema 3.5. (ii). Por otro lado, observamos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta K_n(\theta-\tau)d\tau$$

es $\sigma_n(\theta)$ cuando $f(\theta) = \cos(\theta)$ y dado que la serie de Fourier del $\cos(\theta)$ consiste de un único término que es $\cos(\theta)$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta K_n(\theta-\tau)d\tau = \frac{n}{n+1}\cos(\theta)$$

Por lo tanto el segundo término del lado derecho de nuestra igualdad es

$$\frac{2n}{n+1}\cos^2(\theta).$$

De manera análoga, se tiene que el tercer término del lado derecho de nuestra igualdad es

$$\frac{2n}{n+1}\operatorname{sen}^2(\theta).$$

Concluimos

$$\begin{aligned}
\psi_n(x) &= 2-\frac{2n}{n+1}\cos^2(\theta)-\frac{2n}{n+1}\operatorname{sen}^2(\theta)\\
&= 2\left(1-\frac{n}{n+1}\right)(\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta))\\
&= \frac{2}{n+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto ψ_n converge uniformemente a 0 en $\mathbb{S}^1$, entonces aplicando el Teorema 2.7 tenemos que σ_n converge uniformemente a f en $[-\pi,\pi]$.

□

Referencias

[1] Anton R. Schep. *Weierstrass' proof of the weierstrass approximation theorem*. University of South Carolina, 2007.

[2] Buntinas, Martin. *Classical and discrete functional analysis with measure theory*. Cambridge University Press, 2022.

[3] Devore J. L. *Modern Mathematical Statistics with Aplications*. Springer Texts in Statistics, 2021.

[4] Resnick, S.I. *A Probability Path*. Birkhäuser, Boston, MA (1999).

[5] Srinivasan Kesavan. *Korovkin's Theorem-Revisited*. 2015, https://api.semanticscholar.org/CorpusID:221675916.

[6] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. Tata McGraw-Hill Edition, 2006.

[7] Weierstrass K. *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen*. Verl. d. Kgl. Akad. d. Wiss. Berlin **2** (1885) 633–639.