NOTAS INTRODUCTORIAS A LA MEDIDA DE BROWN

FRANCISCO TORRES-AYALA

1. Introducción

Sin lugar a dudas el Teorema Espectral (Teorema 4.30 en [3]; Teorema 5.2.8 en [8]; Teorema 1, seccón 2, capítulo X en [7]) es una de las herramientas más importantes para estudiar operadores lineales actuando sobre espacios de Hilbert. La principal limitante de éste teorema es que dentro de sus hipótesis se requiere la normalidad del operador. La medida de distribución espectral de Brown es una respuesta a ésta limitante, siempre y cuando el operador bajo consideración pertenezca o esté afiliado a una álgebra de von Neumann finita. A diferencia del Teorema Espectral, que provee una medida valuada a operadores (es decir, una resolución de la identidad), la medida de Brown es una medida clásica de probabilidad sobre los Borelianos de $\mathbb{C}$. La principal diferencia es que dicha medida se puede construir para cualquier operador, acotado o no acotado, sin requerir que el operador sea normal. Esta medida extiende, vía un estado fiel, el cálculo funcional para operadores normales. La medida de Brown fué primero introducida por L.G. Brown en [1], enfocándose principalmente en operadores acotados y dando sólo un bosquejo para el caso no acotado. Más adelante, Haagerup y Schultz, demostraron rigurosamente su existencia para operadores no acotados y afiliados a una álgebra de von Neumann finita (ver [4]).

El objetivo de las presentes notas es dar una construcción detallada, y razonablemente autocontenida, de la medida de Brown para operadores acotados que pertenecen a una álgebra de von Neumann finita (se incluye un apéndice con las definiciones previas más relevantes). Estas notas están basadas en un curso impartido por Ken Dykema en Texas A& M en el otoño del 2011. Desafortunadamente Ken tuvo un accidente en bicicleta en ese tiempo así que las notas no son cien por ciento fieles a lo que Ken hubiera dado, pero están basadas en los artículos que él utilizó ([1] y[4]).

Como requisitos previos se asumen conocimientos de Análisis Funcional (ver por ejemplo [5]) y aspectos de la teoría de álgebras de Banach (que pueden consultarse en [3] o en [8]); muy en especial el cálculo funcional para elementos normales.

2. Algebras de von Neumann finitas

En esta sección se presentan preliminares sobre álgebras de von Neumann. Sin embargo, no se presenta un desarrollo completo del tema si no más bien una recopilación de definiciones y propiedades que se usarán a lo largo de las notas.

Siempre que se hable de una álgebra de von Neumann se pensará asociada a un espacio de Hilbert concreto. Asi pues, dado un espacio de Hilbert H,

denotamos por $\mathbb{B}(H)$ al conjunto de operadores lineales acotados de H. Una álgebra de von Neumann, actuando en H, es una sub-álgebra C* de $\mathbb{B}(H)$, que contiene a la identidad y que además es cerrada bajo la topología fuerte de operadores. Recordemos que una red de operadores en H, $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, converge fuertemente a un operador T si

$$\lim_\lambda T_\lambda(\xi) = T(\xi) \quad \text{para todo } \xi \in H. \tag{1}$$

Además, gracias a la identidad de polarización, sobre redes acotadas en norma de $\mathbb{B}(H)$, la condición (1) es equivalente a

$$\lim_\lambda \langle T_\lambda(\xi), \eta\rangle = \langle T(\xi), \eta\rangle \quad \text{para todos } \xi, \eta \in H. \tag{2}$$

La topología débil de operadores es la dada por las redes cuya convergencia está dada por la condición (2).

Ya que la topología débil de operadores y la topología fuerte de operadores coninciden en subconjuntos convexos de $\mathbb{B}(H)$ (Teorema 5.1.2 en [8]), es equivalente pedir que la álgebra de von Neumann sea cerrada bajo una o la otra.

Si $M \subset \mathbb{B}(H)$ denota una álgebra de von Neumann por M_{sa} denotamos a los elementos auto-adjuntos de M; por $M_{\geq 0}$ denotamos a los operadores en M que son positivos, es decir, operadores para los cuales $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$, para todo ξ en H (o equivalentemente, son los peradores que admiten una expresión $T = S^*S$, para algún elemento S en M, ver Corolario 4.34 en [3]); por $(M)_1$ denotamos a los elementos de M con norma de operador menor o igual a uno.

Definición 2.1. *Un estado en una álgebra de von Neumann M, es una funcional $\varphi : M \to \mathbb{C}$ que satisface $\varphi(T) \geq 0$, para todo T en $M_{\geq 0}$ y que además cumple $\varphi(1_M) = 1$.*

Un estado se llama fiel si: $\varphi(T^*T) = 0$ implica $T = 0$.

Una traza es un estado φ que satisface $\varphi(ST) = \varphi(TS)$, para cualesquiera S y T en M.

Un estado se llama normal si su restricción a $(M)_1$ es débilmente continuo.

Finalmente, una álgebra de von Neumann se llama finita si admite una traza fiel y normal.

Parte de la importancia de las álgebras finitas es que en ellas los operadores admiten una descomposición polar. Una demostración del siguiente lema se puede consultar en [2], Teorema I.8.1.

Lema 2.2. *Cualquier elemento x, en una álgebra de von Neumann finita, admite una descomposición polar, es decir, se puede expresar $x = uh$ donde h pertenece a $M_{\geq 0}$ y u es unitario (i.e. $uu^* = u^*u = 1$).*

Observación 2.3. *La condición de finitud es necesaria. Para verlo, pude tomarse el operador de desplazamiento a la derecha, actuando en ℓ_2.*

3. El determinante de Fuglede-Kadison

El determinante de Fuglede-Kadison es una generalización del determinante en el contexto de álgebras de von Neumann finitas. El determinante

de Fuglede-Kadison es la herramienta preliminar necesaria para definir la medida de Brown de un operador.

Durante ésta sección por $M \subseteq \mathbb{B}(H)$ se denotará a una álgebra de von Neumann finita y por τ a una traza normal y fiel en M.

Se fija un elemento en M que sea auto-adjunto, denotado por a. Para una función $f : \mathrm{sp}(a) \to [0, \infty]$, Borel medible, no negativa, con valores en los reales extendidos, se denota por μ_a a la medida de probabilidad, sobre los Borelianos de $\mathbb{R}$, obtenida mediante la composición de τ con E_a, siendo ésta última la medida espectral de a. Por $\tau[f(a)]$ se denota la integral

$$\tau[f(a)] := \int_{\mathrm{sp}(a)} f(t) d\mu_a(t)$$

Se debe de notar que si f es escencialmente acotada, $f(a)$ es un elemento de M (el cual está dado por el cálculo funcional) y por lo tanto $\tau[f(a)]$ es simplemente la traza de $f(a)$. La definición de $\tau[f(a)]$ para funciones borel medible no negativas, es flexible pues se permite que $\tau[f(a)]$ tome el valor de $+\infty$.

De manera más general, si $f : \mathrm{sp}(a) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, es una función borel medible, con valores en los reales extendidos, con la condición adicional de que almenos una de las siguientes integrales sea finita

$$\int_{\mathrm{sp}(a)} f(t)^+ d\mu_a(t), \quad \int_{\mathrm{sp}(a)} f^-(t) d\mu_a(t)$$

se define $\tau[f(a)]$ como

$$\tau[f(a)] := \int_{\mathrm{sp}(a)} f^+(t) d\mu_a(t) - \int_{\mathrm{sp}(a)} f^-(t) d\mu_a(t).$$

Definición 3.1. *El determinante de Fuglede-Kadison en M, es la función $\Delta : M \to [0, \infty)$, dada por*

$$\Delta(x) = \Delta(|x|) = e^{\tau[\log |x|]}.$$

donde $|x| = (xx^*)^{1/2}$.

Debe de observarse que para cualquier x en M, la parte positiva de $\log(t)$, $t \in \mathrm{sp}(|x|)$, está siempre acotada, por lo tanto, $\Delta(x)$ siempre está bien definida. Además $\Delta(x) = 0$ si y sólo si

$$\int_0^1 \log(t) d\mu_{|x|}(t) = -\infty.$$

Se verá que el determinante Fuglede-Kadison comparte muchas de las propiedades de los determinantes que usualmente se usan en algebra lineal. Antes de empezar formalmente su esudio calculemos el determinante de Fuglede-Kadison para álgebras de matrices con entradas en $\mathbb{C}$. En ésta álgebra la traza está dada por la traza normalizada, la cual es denotada por tr_n (donde la n indica que tomamos matrices de $n \times n$).

Para cualquier matriz A, de dimensión n, se sabe que μ_A (con la misma notación que la dada anteriormente) es la llamada distribución empírica de valores propios, es decir es igual a $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k}$, donde por $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ se

denotan los valores propios de A, listados de acuerdo a su multiplicidad, y δ_t es simplemente la medida de Dirac concentrada en t. Por lo tanto

$$\mathrm{tr}_n(\log(|A|)) = \log(|\lambda_1 \cdots \lambda_n|^{1/n})$$

asi que

$$\Delta(A) = |\lambda_1 \cdots \lambda_n|^{1/n} = |\det(A)|^{1/n}.$$

Asi pues, llamar *determinante* a la función Δ no está fuera de lugar.

A partir de éste punto, el principal objetivo es demostrar que Δ es multiplicativa. Esto no resulta ser sencillo y la razón de fondo es, al pensarlo un momento, que la médula de calcular $\Delta(ab)$ reside en la medida $\mu_{|ab|}$, la cual no está relacionada de manera sencilla con las medidas $\mu_{|a|}$ y $\mu_{|b|}$. Por lo tanto se requerirá una cantidad considerable de lemas para provar que Δ es multiplicativa. Para comenzar se comienza enfocándose en los elementos invertibles.

Lema 3.2. *(I) Para x invertible y λ un número complejo se se cumple:*

$$\Delta(\lambda x) = |\lambda|\Delta(x).$$

(II) Para cualquier elemento normal a en M se tiene:

$$\Delta(Exp(a)) = e^{\tau[a]}.$$

(III) Para u_1 y u_2 unitarios se cumple:

$$\Delta(u_1 x u_2) = \Delta(x).$$

(IV) Para x invertible se satisface:

$$\Delta(x) = \Delta(x^*) = \Delta(xx^*)^{1/2}.$$

Demostración. (I) Notar que $|\lambda x| = |\lambda||x|$. Ahora, ya que $|\lambda|$ y x conmutan, $\log(|\lambda x|) = \log(|\lambda|) + \log(|x|)$ (es importante observar que el último operador está bien definido porque x es invertible). La demostración se termina tomando traza y luego exponencial en ambos lados de la última igualdad.

(II) Como a es normal, $|Exp(a)| = Exp(a+a^*)^{1/2}$. Por lo tanto $\log(|Exp(a)|) = \frac{1}{2}(a+a^*)$. Ya que $\tau[y^*] = \overline{\tau[y]}$, para cualquier y, se sigue que $\Delta(Exp(a)) = e^{\tau[a]}$.

(III) Por $E_{|u_1 x u_2|}$ y $E_{|x|}$ se denotan las resoluciones de la identidad de $|u_1 x u_2|$ y $|x|$ respectivamente. El primer paso es probar que $E_{|u_1 x u_2|} = u_1 E_{|x|} u_1^*$. Para éste fin se define $E := u_1 E_{|x|} u_1^*$. Es claro que E define una resolución de la identidad y para probar la igualdad $E = E_{|u_1 x u_2|}$ es suficiente probar

$$\langle |u_1 x u_2|^n \xi, \eta\rangle = \int_{\mathrm{sp}(|u_1 x u_2|)} t^n dE_{\xi,\eta}(t) \tag{3}$$

para cualesquiera par de vectores ξ y η en H y cualquier natural n.

Un cálculo directo muestra que $|u_1 x u_2| := ((u_1 x u_2)(u_1 x u_2)^*)^{1/2} = u_1|x|u_1^*$ y por inducción se puede concluir que $|u_1 x u_2|^n = u_1|x|^n u_1^*$, para toda n natural. Se sigue que $\mathrm{sp}(|u_1 x u_2|) = \mathrm{sp}(|x|)$. Por lo tanto (3) se reduce a

$$\langle |x|^n u_1^* \xi, u_1^* \eta \rangle = \int_{\mathrm{sp}(|x|)} t^n dE_{\xi,\eta}(t). \tag{4}$$

Pero, para cualquier A boreliano de $\mathrm{sp}(|x|)$, de la definición de E se cumple que $dE_{\xi,\eta}(A) = dE_{|x|,u_1^*\xi,u_1^*\eta}(A)$. Por lo que se sigue

$$\int_{\mathrm{sp}(|x|)} t^n dE_{\xi,\eta}(t) = \int_{\mathrm{sp}(|x|)} t^n dE_{|x|,u_1^*\xi,u_1^*\eta}(t).$$

Se concluye (4) usando que

$$\int_{\mathrm{sp}(|x|)} t^n dE_{|x|,u_1^*\xi,u_1^*\eta}(t) = \langle |x|^n u_1^* \xi, u_1^* \eta \rangle.$$

(IV) Como x es invertible, se sigue que también $|x|$, $|x^*|$ y xx^* lo son. Por lo tanto, sus espectros están contenidos en $(0,\infty)$ y el cálculo funcional implica que $\log(|x|), \log(|x^*|)$ y $\log(|xx^*|)$ son elementos bien definidos en M.

Para probar la primera parte se demostrará que

$$\tau[\log|x|] = \tau[\log|x^*|].$$

Primeramente, como $|x|$ y $|x^*|$ son invertibles, existen números positivos m_1 y m_2 tal que $\mathrm{sp}(|x|), \mathrm{sp}(|x^*|) \subseteq [m_1, m_2]$. Ahora, sobre $[m_1.m_2]$, log admite una serie de potencias que converge uniformemente. Entonces la igualdad $\tau[\log|x|] = \tau[\log|x^*|]$ será válida siempre y cuando $\tau[\log((xx^*)^n)] = \tau[\log(x^*x)^n]$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Pero, ésta última identidad es válida ya que τ es una traza.

Para probar que $\Delta(x) = \Delta(xx^*)^{1/2}$ es suficiente probar que

$$2\tau[\log|x|] = \tau[\log|xx^*|]$$

Pero, ya que x es invertible, podemos aplicar cálculo funcional para llegar a que $\log(|x|) = \frac{1}{2}\log(xx^*)$ y $\log(|xx^*|) = \log(xx^*)$, lo cual termina la demostración.

□

El siguiente lema será útil para investigar el comportamiento de Δ bajo cierto tipo de conjugaciones unitarias.

Lema 3.3. *Por $\Lambda \subset \mathbb{C}$ se denota a un abierto acotado, cuya frontera, denotada por γ, es una curva diferenciable, cerrada simple orientada positivamente, y por f se denota una función holomorfa en una vecindad abierta de $\Lambda \cup \gamma$.*

Si $x : [0,1] \to M$ es diferenciable con $\mathrm{sp}(x(t)) \subseteq \Lambda$, para todo t en $[0,1]$, entonces $t \mapsto f(x(t))$ es diferenciable y

$$\tau\left[\frac{d}{dt} f(x(t))\right] = \tau\left[f'(x(t))x'(t)\right]$$

Demostración. Primeramente se recuerda que, si $\mathrm{sp}(x) \subseteq \Lambda$, el cálculo funcional holomorfo (ver Teorema 3.3.5 en [8]) implica que el elemento $f(x)$ está dado por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z-x)^{-1} dz$$

Se sigue que, para $h \in (0,1)$:

$$f(x(t+h)) - f(x(t)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\left[(z-x(t+h))^{-1} - (z-x(t))^{-1})\right]dz. \tag{5}$$

Por otra parte, se puede comprobar de manera directa que:

$$(z-x(t+h))^{-1} - (z-x(t))^{-1} = [z-x(t+h)]^{-1}(x(t+h)-x(t))[z-x(t)]^{-1}.$$

Por lo tanto, dividiendo (5) por h y tomando límite cuando $h \to 0$, deducimos

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)(z-x(t))^{-1}x'(t)(z-x(t))^{-1}dz.$$

Ahora usamos que τ es una traza para obtener

$$\begin{aligned}\tau\left[\frac{d}{dt}f(x(t))\right] &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\tau[(z-x(t))^{-2}x'(t)]dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\tau\left[\int_\gamma f(z)(z-x(t))^{-2}x'(t)dz\right] \\ &= \tau\left[\frac{1}{2\imath i}\int_\gamma f(z)(z-x(t))^{-2}dzx'(t)\right].\end{aligned}$$

Finalmente, una aplicación de la fórmula integral de Cauchy termina la demostración. □

El siguiente lema da una cota superior para $\Delta(x)$ y más adelante ayudará a ver la continuidad de Δ.

Lema 3.4. *Para todo x en M, $\Delta(x) \leq \|x\|$.*
Si además x es invertible también tenemos: $\|x^{-1}\|^{-1} \leq \Delta(x)$.

Demostración. Sín pérdida de generalidad podemos suponer que $x \geq 0$. Ahora, para cualquier $x \geq 0$, $\mathrm{sp}(x) \subseteq [0, \|x\|]$. Por lo tanto

$$\int_{\mathrm{sp}(x)} \log(t)d\mu_x(t) \leq \log(\|x\|)$$

y de lo anterior se sigue que $\Delta(x) \leq \|x\|$.

Si además x es invertible, el cálculo funcional muestra que $\mathrm{sp}(x) \subseteq [\|x^{-1}\|^{-1}, \|x\|]$, que de la misma manera implica la desigualdad $\|x^{-1}\|^{-1} \leq \Delta(x)$. □

El siguiente lema muestra el comportamiento de Δ bajo conjugaciones de la forma $Exp(a)$.

Lema 3.5. *Sean h y a en M, con h autoadjunto. Entonces se vale*

$$\Delta(Exp(a^*)Exp(h)Exp(a)) = e^{\tau[a^*+a]}e^{\tau[h]}.$$

Demostración. Para t real se define $x(t) = Exp(ta^*)Exp(h)Exp(ta)$. Por definición es claro que $x(t) \geq 0$ (ver Corolario I.4.6 en [2]). Además, por las propiedades de la exponencial, $x(t)$ es invertible con

$$x(t)^{-1} = Exp(-ta)Exp(-h)Exp(-ta^*).$$

Tomando en cuenta de que, para cualquier a fijo, la función $t \mapsto Exp(ta)$ es diferenciable (en el sentido de espacios de Banach), y su derivada es $Exp(ta)a = aExp(ta)$, se sigue que $t \mapsto x(t)$ es diferenciable con

$$x'(t) = a^*Exp(ta^*)Exp(h)Exp(ta) + Exp(ta^*)Exp(h)Exp(ta)a.$$

A continuación, usando que $\|Exp(b)\| \leq e^{\|b\|}$ para cualquier b, se sigue que para t en el intervalo $[0,1]$,

$$\|x(t)\|, \|x(t)^{-1}\| \leq e^{\|a^*\|}e^{\|h\|}e^{\|a\|}.$$

Por lo tanto, si $0 < \alpha < e^{\|a^*\|}e^{h}e^{\|a\|}$ y $0 < \beta < e^{-\|a^*\|}e^{-\|h\|}e^{-\|a\|}$, se sigue que $\mathrm{sp}(x(t)) \subseteq (\beta, \alpha)$, para todo t en $[0,1]$.

Ahora, se toma una rama holomorpha de log en $\mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ y aplicamos el lema 3.3 a la función $f(z) = \log(z)$ para obtener

$$\tau\left[\frac{d}{dt}f(x(t))\right] = \tau\Big[x(t)^{-1}[a^*x(t) + x(t)a]\Big] = \tau[a^* + a]$$

donde, para la última igualdad usamos que τ es una traza.

Por otro lado, ya que τ es lineal, $\tau[\frac{d}{dt}f(x(t))] = \frac{d}{dt}\tau[f(x(t))]$. Por lo tanto

$$\tau[\log(x(1))] - \tau[\log(x(0))] = \int_0^1 \frac{d}{dt}\tau[f(x(t))]dt = \tau[a + a^*],$$

lo cual implica

$$\tau[\log(x(1))] = \tau[h] + \tau[a^* + a].$$

Finalmente, aplicando exponenciales en ambos lados obtenemos el resultado.

□

En éste punto podemos probar la propiedad multiplicativa de Δ, pero sólo para elementos invertibles.

Teorema 3.6. *Si x e y son elementos invertibles en M entonces*

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y).$$

Demostración. Por el lema 2.2 se puede escribir $x = u_1h_1, y = h_2u_2$, donde h_1 y h_2 son elementos invertibles y positivos y ambos, u_1 y u_2, son unitarios. Por el lema 3.2 se sigue que

$$\Delta(xy) = \Delta(h_1h_2) = \sqrt{\Delta(h_1h_2^2h_1)}$$

Como tanto h_1 y h_2 son invertibles y positivos, es posible encontrar elementos a_1 y a_2 en M para los cuales $a_i = \log(h_i)$. Por lo tanto, el lema 3.5 implica

$$\begin{aligned}\Delta(h_1h_2^2h_1) &= \Delta(Exp(a_1)Exp(2a_2)Exp(a_1)) \\ &= e^{\tau[a_1+a_1]}e^{\tau[2a_2]} = (e^{\tau[a_1]}e^{\tau[a_2]})^2 \\ &= (\Delta(h_2))^2(\Delta(h_1))^2.\end{aligned}$$

De nuevo, el lema 3.2 implica $\Delta(h_1)^2 = \Delta(x)$ y $\Delta(h_2)^2 = \Delta(y)$, lo cual concluye la demostración. □

Para probar la propiedad multiplicativa de Δ en toda su generalidad necesitamos checar la continuidad y monotonía de Δ.

Teorema 3.7. *La restricción de Δ al grupo de elementos invertibles en M, es continua con respecto a la norma.*

Demostración. Se probará que, para cualquier par de elementos invertibles x, y en M:

$$\|\Delta(x) - \Delta(y)\| \leq \|x\|\|x^{-1}\|\|y - x\|.$$

Para lo anterior, primero se comienza con el caso $x = 1_M$ y $y = 1_M + a$ donde a es cualquier elemento de M. Reescribiendo, es suficiente probar

$$\Delta(1_M + a) \leq \|a\| + 1$$

y

$$1 - \|a\| \leq \Delta(1_M + a)$$

La primera desigualdad se sigue directo del lema 3.4. Para la segunda, sólo necesitamos considerar el caso $\|a\| < 1$ (pues de lo contrario la desigualdad se da de manera trivial). Bajo ésta suposición , $1_M + a$ es invertible y $\|(1_M + a)^{-1}\| \leq (1 - \|a\|)^{-1}$ (ver Proposición 2.5 en [3]). Entonces, la segunda parte del lema 3.4 implica

$$\Delta(1_M + a) \geq \|(1_M + a)^{-1}\|^{-1} \geq 1 - \|a\|.$$

Ahora vamos por el caso general. Tomar $a := (y - x)x^{-1} = yx^{-1} - 1$. Entonces, usando que Δ es multiplicativa en el grupo de elementos invertibles se obtiene:

$$|\Delta(y) - \Delta(x)| = |\Delta(yx^{-1}) - 1|\Delta(x) = |\Delta(1_M + a) - 1|\Delta(x).$$

Ahora, el primer caso implica

$$|\Delta(1_M + a) - 1| \leq \|a\| = \|yx^{-1} - 1\| \leq \|y - x\|\|x^{-1}\|$$

y por lo tanto podemos concluir

$$|\Delta(x) - \Delta(y)| \leq \|y - x\|\|x^{-1}\|\|x\|.$$

□

Ahora se probará la monotonía de Δ.

Teorema 3.8. *Si $0 \leq h_2 \leq h_1$ y h_2 es invertible, entonces $\Delta(h_2) \leq \Delta(h_1)$.*

Demostración. Ya que $h_2 \leq h_1$ y h_2 es invertible se sigue que h_1 también es invertible y además $0 \leq h_1^{-1/2} h_2 h_1^{-1/2} \leq 1_M$. Por lo tanto $\tau[\log(h_1^{-1/} h_2 h_1^{-1/2})] \leq 0$ y en consecuencia $\Delta(h_1^{-1/2} h_2 h_1^{-1/2}) \leq 1$.

Por otro lado, usando la multiplicatividad de Δ en el grupo de elementos invertible tenemos

$$\begin{aligned} \Delta(h_1^{-1/2} h_2 h_1^{-1/2}) &= \Delta(h_1^{-1/2})\Delta(h_2)\Delta(h_1^{-1/2}) \\ &= \Delta(h_1^{-1/2} h_1^{-1/2})\Delta(h_2) \\ &= \Delta(h_1^{-1})\Delta(h_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, multiplicando ambos lados de $\Delta(h_1^{-1/2} h_2 h_1^{-1/2}) \leq 1$ por $\Delta(h_1^{-1})$ obtenemos el resultado deseado.

□

El siguiente lema empieza a tratar la continuidad de Δ.

Lema 3.9. *(I) Si h es un elemento en $M_{\geq 0}$, $\Delta(h) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Delta(h + \varepsilon I)$.*

(II) Δ es monótona creciente, es decir si h_1 y h_2, son dos elementos en $M_{\geq 0}$, con $h_2 \leq h_1$, entonces $\Delta(h_2) \leq \Delta(h_1)$.

(III) *Si* $\lim_n \|x_n - x\| = 0$ *entonces* $\limsup_n \Delta(x_n) \leq \Delta(x)$.
(IV) *Si* $(h_n)_{n\geq 1}$ *es una sucesión monótona creciente de elementos en* $M_{\geq 0}$ *y* $\lim_n \|h_n - h\| = 0$, *entonces* $\lim_n \Delta(h_n) = \Delta(h)$.

Demostración. (I) Por E_h se denota la resolución de la identidad de h. Se define una medida espectral en los Borelianos de $\mathrm{sp}(h+\varepsilon) = \mathrm{sp}(h) + \varepsilon$ por $E(B) := E_h(B - \varepsilon)$. Se demostrará que $E = E_{h+\varepsilon}$. Ya que $C^*(h+\varepsilon, 1) = C^*(h, 1)$ (donde $C^*(\cdot)$ denota el álgebra C^* denerada), es suficiente probar que

$$\langle h^n \xi, \eta\rangle := \int_{\mathrm{sp}(h+\varepsilon)} s^n dE_{\xi,\eta}(s)$$

para cualquier par de vectores ξ y η en H y cualquier natural n.

Ahora, se define la medida compleja $d\tilde{E}_{\xi,\eta}$, en los Borelianos de $\mathrm{sp}(h)$, tal que $d\tilde{E}_{\xi,\eta}(A) = dE_{\xi,\eta}(A+\varepsilon)$. Un argumento de aproximación mediante funciones simples prueba que :

$$\int_{\mathrm{sp}(h+\varepsilon)} s^n dE_{\xi,\eta}(s) = \int_{\mathrm{sp}(h)} t^n d\tilde{E}_{\xi,\eta}(t)$$

Pero nótese que $d\tilde{E}_{\xi,\eta} = dE_{h,\xi,\eta}$. Por lo tanto

$$\int_{\mathrm{sp}(h+\varepsilon)} s^n dE_{\xi,\eta}(s) = \int_{\mathrm{sp}(h)} t^n dE_{h,\xi,\eta}(t) = \langle h^n \xi, \eta\rangle$$

lo cual concluye la prueba de que $E = E_{h+\varepsilon}$.

Ahora se definen $\mu := \tau \circ E_h$ y $\mu_\varepsilon := \tau \circ E_{h+\varepsilon}$. Por lo que se acabda de probar se sigue que $\mu_\varepsilon(B) = \mu(B - \varepsilon)$, para todo B, subconjunto borel medible de $\mathrm{sp}(h+\varepsilon)$. Por lo tanto

$$\int_{\mathrm{sp}(h)+\varepsilon} \log(s) d\mu_\varepsilon(s) = \int_{\mathrm{sp}(h)} \log(t+\varepsilon) d\mu(t).$$

Posteriormente, una cuidadosa aplicación del Teorema de la Convergencia Monótona (tomando partes positiva y negativa de $\log(t)$) prueba que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathrm{sp}(h)} \log(t+\varepsilon) d\mu(t) = \int_{\mathrm{sp}(h)} log(t) d\mu(t),$$

que a su vez implica $\lim_\varepsilon \Delta(h+\varepsilon) = \Delta(h)$.

(II) Por el Teorema 3.8 se tiene que $\Delta(h_2 + \varepsilon) \leq \Delta(h_1 + \varepsilon)$. Por lo tanto, la parte (II) se sigue de la parte (I) al tomar límite cuando $\varepsilon \to 0$.

(III) Primeramente, se prueba el caso cuando $x_n \geq 0$ para toda n. Ya que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ se sigue que $x \geq 0$ y por el Teorema 3.7, para una $\varepsilon > 0$ dada, $\lim_n \Delta(x_n + \varepsilon) = \Delta(x + \varepsilon)$. Pero por monotonía, $\Delta(x_n) \leq \Delta(x_n+\varepsilon)$ y por lo tanto $\limsup_n \Delta(x_n) \leq \Delta(x+\varepsilon)$. Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ se obtiene el resultado.

Ahora suponemos que los x_n son arbitrarios y que $\lim_n \|x_n - x\| = 0$. Se sigue que $\lim_n \|x_n x_n^* - x x^*\| = 0$ y por el primer caso $\limsup_n \Delta(x_n x_n^*) \leq \Delta(xx^*)$. Finalmente, el resultado se obtiene al tomar raíz cuadrada en ambos lados de la desigualdad anterior.

(IV) Ya que la sucesión $(h_n)_{n\geq 1}$ es monótona creciente y $\lim_n \|h-h_n\| = 0$ se sigue que $h \geq h_n$. Entonces, por monotonía de Δ, para toda n se tiene que $\Delta(h) \leq \Delta(h+h-h_n)$. Por lo tanto, se sigue que

$$\Delta(h) \leq \liminf_n \Delta(h+h-h_n) \leq \limsup_n \Delta(h+h-h_n) \leq \Delta(h)$$

(donde en la última desigualdad se uso la parte (III)).

□

Teorema 3.10. *Para cualesquiera x, y en M, se cumple $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$.*

Demostración. Por el Lema 2.2, se puede escribir $x = u_1h_1$ y $y = h_2u_2$, donde $h_1, h_2 \geq 0$ y u_1 y u_2 son unitarios. Se sigue que:

$$\Delta(xy) = \Delta(u_1h_1h_2u_2) = \Delta(h_1h_2) = \sqrt{\Delta(h_1h_2^2h_2)}.$$

Por lo tanto, es suficiente probar que $\Delta(aba) = \Delta(a)^2\Delta(b)$ para $a, b \geq 0$.
Ahora, para un número positivo $\varepsilon > 0$ se define

$$\begin{aligned} c_\varepsilon &:= (a+\varepsilon^2(b+\varepsilon)^{-1})(b+\varepsilon)(a+\varepsilon^2(b+\varepsilon)^{-1}) \\ &= aba + \varepsilon a^2 + 2\varepsilon^2 a + \varepsilon^4(b+\varepsilon)^{-1}. \end{aligned}$$

Notese que $c_\varepsilon \geq aba \geq 0$. Aún más, el cálculo funcional para b muestra que $\|(b+\varepsilon)^{-1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon}$. En consecuencia $\lim_{\varepsilon\to 0}\|c_\varepsilon - aba\| = 0$. Por lo tanto, el Lema 3.9 prueba que $\lim_\varepsilon \Delta(c_\varepsilon) = \Delta(aba)$.
Pero, por el Teorema 3.6, $\Delta(c_\varepsilon) = \Delta(a+\varepsilon(b+\varepsilon)^{-1})^2\Delta(b+\varepsilon)$.
Una nueva aplicación del Lema 3.9 implica que $\lim_\varepsilon \Delta(a+\varepsilon^2(b+\varepsilon)^{-1}) = \Delta(a)$ y $\lim_\varepsilon(b+\varepsilon) = \Delta(b)$, lo cual concluye la demostración.

□

Concluimos ésta sección con un resultado bien conocido del área de álgebras de Banach y que será útil más tarde.

Lema 3.11. *Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y supongase que se tiene una función $x : I \to M$, diferenciable fuertemente, en el sentido de que el siguiente límite existe en norma de operadores*

$$\frac{dx}{dt}(t_0) := \lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$$

para todo t_0 en I. Si $x(t)$ es invertible, para t en I, entonces

$$\frac{dx^{-1}}{dt}(t_0) = -x(t_0)^{-1}\frac{dx}{dt}(t_0)x(t_0)^{-1}$$

Demostración. Para t y t_0 en I, un cálculo directo prueba que

$$\frac{x(t)^{-1}-x(t_0)^{-1}}{x-x_0} = -x(t)^{-1}\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)x(t_0)^{-1}$$

Tomando límite cuando $t \to t_0$ y, tomando en cuenta de que $a \mapsto a^{-1}$ es un homeomorfismo del grupo de elementos invertibles (con respecto a la norma de operadores), se concluye el resultado.

□

4. Funciones sub-armónicas

Las funciones sub-armónicas juegan un papel fundamental en la definición de la medida de Brown de un operador así que esta sección está dedicada a recopilar y demostrar, en su mayoría, las propiedades necesarias para éste propósito.

Observación 4.1. *Una manera intuitiva de pensar a las funciones sub-armónicas es como análogos de funciones convexas. Por ejemplo, si por $I \subseteq \mathbb{R}$ denotamos un intervalo, entonces:*

1. *una función dos veces diferenciable $h : I \to \mathbb{R}$, es lineal si $h'' = 0$. Por lo tanto, en $\mathbb{R}$, las funciones armónicas son simplemente las lineales;*
2. *una función $f : I \to \mathbb{R}$, es convexa si y sólo si para cualesquiera x_1, x_2 en I, con $x_1 < x_2$ y cualquier función lineal h, las siguientes desigualdades $f(x_1) \leq h(x_1)$, $f(x_2) \leq h(x_2)$ implican $f(x) \leq h(x)$ para cualquier x en el intervalo (x_1, x_2);*
3. *si f es convexa y f'' existe entonces $f'' \geq 0$.*

Por el resto de la sección D es un abierto conexo de $\mathbb{R}^2$. Recuerdese que una función es armónica en D si es continua en la cerradura de D, dos veces diferenciable en D y satisface $\partial_x^2 u + \partial_y u^2 = 0$ en D.

Para empezar recordamos propiedades bien conocidas de las funciones armónicas.

Teorema 4.2. *$h : D \to \mathbb{R}$ es armónica sii h es la parte real de una función analítica en D.*

Teorema 4.3 (Poisson Integral Formula)**.** *Si h es armónica en el disco abierto $D(z_0, R)$ y continua en su cerradura, entonces para todo z en $D(z_0, R)$*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0,R)} \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{R|w - z|^2} h(w) d\sigma(w)$$

donde σ denota el elemento de longitud de arco.

In particular, cuando $z = z_0$,

$$h(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial D(z_0,R)} h(w) d\sigma(w) \tag{6}$$

Ahora se se empiezan a tratar a las funciones sub-armónicas.

Definición 4.4. *$u : D \to [-\infty, \infty)$ es llamada sub-armónica en D si*

1. *u es continua superiormente en D (i.e. $u^{-1}(-\infty, \alpha)$ es abierto en D, para todo α real);*
2. *para todo z en D, existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $r \in (0, \varepsilon)$*

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D(z_0,r)} u(w) d\sigma(w)$$

(se presupone que $\overline{D}(z_0, \varepsilon) \subseteq D$).

Notar la similitud con (6).

Directamente de la definición se obtiene la siguiente observación.

Observación 4.5. *Si $\{u_k\}_{k\geq 1}$ es una familia de funciones sub-armónicas, entonces para todo $n \geq 1$, $\max_{1\leq k\leq n}\{u_k\}$ y $\min_{1\leq k\leq n}\{u_k\}$ son sub-armónicas.*

Además, las funciones sub-armónicas que no son idénticamente $-\infty$ toman éste valor sólo en un conjunto de medida cero. Lo anterior es consecuencia del siguiente lema que puede consultarse en [6], Teorema 2.6.

Lema 4.6. *Sea $u : D \to [-\infty, \infty)$ una función sub-armónica, no idénticamente $-\infty$. Entonces, para todo compacto K contenido en D*

$$\int_K u(x)dx > -\infty$$

El siguiente teorema justifica el nombre sub-armónicas.

Teorema 4.7. *Asumir que $u : D \to \mathbb{R}$ es clase C^2 en D.*
La función u es sub-armónica en D sii $\nabla^2 u \geq 0$ en D.

Demostración. Gracias al Teorema de Green se tiene que, para cualquiera funciones clase C^2, u y v, y para cualquier punto z_0 en D y radio r_0, tal que la cerradura de $D(z_0, r_0)$ está contenida en D, se tiene

$$\int_{D(z_0,r_0)} (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)dA = \int_{\partial D(z_0,r_0)} (u\partial_n v - v\partial_n u)d\sigma,$$

donde ∂_n denota la derivada direccional con respecto al vector normal, apuntando hacia dentro, del círculo $|w - z_0| = r_0$.

Si en la identidad anterior se toma v igual a la función constante 1, se deduce que, para $0 \leq r_1 < r_2 \leq r_0$, se cumple

$$\int_{|w-z_0|=r_2} \partial_n u(w)d\sigma(w) - \int_{|w-z_0|=r_1} \partial_n u(w)d\sigma(w) = \int_{r_1\leq|z-z_0|\leq r_2} \nabla^2 u(w)dA(w) \tag{7}$$

Por comidad, y para $0 \leq r \leq r_0$, se denota

$$J_{z_0}(r) := \frac{1}{2\pi r}\int_{|w-z_0|=r} u(w)d\sigma(w).$$

Un cálculo directo demuestra que

$$J'_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_0|=r} \partial_n u(z)d\sigma(z).$$

Ahora se asume que $\nabla^2 u \geq 0$ en D y se demuestra que u es sub-armónica.

De (7) se sigue que J'_{z_0} es una función monótona creciente en r. Ya que $J'_{z_0} = 0$ se sigue que $J'_{z_0} \geq 0$ en $[0, r_0)$. Por lo tanto J_{z_0} es monótona creciente en $[0, r_0]$ y en consecuencia, para $r \in [0, r_0]$:

$$J_{z_0}(r) \geq \lim_{s\downarrow 0} J_{z_0}(s) = u(z_0).$$

La demostración de la implicación faltante se hace por contrapositiva. Así pues, se asume que $\nabla^2 u(z_0) < 0$ para algún z_0 en D. Entonces $\nabla^2 u < 0$ en una vecindad abierta de z_0. Por lo tanto, de (7) (tomando $r_1 = 0$) se deduce que J_{z_0} es estrictamente decreciente en una vecidad de 0, lo que implica que u no es sub-armónica.

□

La siguiente proposición muestra el comportamiento de los valores promedios y valores máximos de funciones sub-armónicas sobre círculos centrados en el origen.

Proposición 4.8. *Sea $g : \mathbb{C} \to [-\infty, \infty)$ una función sub-armónica. Para $r > 0$ definanse*

$$\begin{aligned} m(r, g) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) d\theta \\ M(r, g) &:= \sup_{|z|=r} \{g(z)\} \end{aligned}$$

Entonces

$$g(0) = \lim_{r\to 0} m(r, g) = \lim_{r\to 0} M(r, g)$$

Demostración. Claramente se tiene $m(r, g) \leq M(r, g)$. Además, al ser g sub-armónica se cumple $g(0) \leq m(r, g)$. Por lo tanto se tienen las desigualdades

$$\begin{aligned} g(0) \leq \liminf_{r\to 0} m(r, g) \leq \limsup_{r\to 0} m(r, g) \leq \limsup_{r\to 0} M(r, g), \\ g(0) \leq \liminf_{r\to 0} m(r, g) \leq \liminf_{r\to 0} M(r, g) \leq \limsup_{r\to 0} M(r, g). \end{aligned}$$

Por otro lado, al ser g continua superiormente ésta alcanza su máximo en conjuntos compactos, por lo que existe z_r con $|z_r| = r$ tal que $g(z_r) = M(r, g)$. Además, al ser g continua superiormente también se cumple

$$g(\lim_{r\to 0} z_r) \geq \limsup_{r\to 0} g(z_r)$$

por lo que

$$g(0) \geq \limsup_{r\to 0} g(z_r) = \limsup_{r\to 0} M(r, g).$$

Finalmente las cadenas de desigualdades

$$g(0) \leq \liminf_{r\to 0} m(r, g) \leq \limsup_{r\to 0} m(r, g) \leq \limsup_{r\to 0} M(r, g) \leq g(0)$$

y

$$g(0) \leq \liminf_{r\to 0} m(r, g) \leq \liminf_{r\to 0} M(r, g) \leq \limsup_{r\to 0} M(r, g) \leq g(0)$$

completan la prueba. □

La demostración del siguiente teorema puede consultarse en [6], Teorema 3.8.

Teorema 4.9. *Sea D un dominio abierto y acotado en $\mathbb{R}^2$. Para un natural n, $D^o(1/n)$ denota al abierto*

$$D^o(1/n) = \{z \in D : \text{dist}(z, \partial D) < 1/n\}$$

Dada $u : D \to \mathbb{R}$ sub-armónica en D, entonces existe una sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$ de funciones sub-armónicas en $D^o(1/n)$, tal que para todo n_0 y para todo x en $D^o(1/n_0)$, $(u_n(x))_{n\geq n_0}$ decrese estrictamente en n y $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$.

La aplicación más importante, para las presentes notas, del teorema anterior es el siguiente corolario.

Corolario 4.10. *Suponer que $u : D \to [-\infty, \infty)$ es sub-armónica y no idénticamente $-\infty$, en un dominio abierto D. Entonces la función $L : C_0^\infty(D) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$L(v) = \int_D u \nabla^2 v dx$$

es una funciónal lineal positva. Es decir, manda funciones mayores o iguales a cero a números mayores o iguales a cero.

Demostración. Sólo se dará un bosquejo de la demostración.

Primero se asume que $D = D(0, 1)$.

Usando el Teorema 4.9 es posible construir una sucesión $(u_k)_{k\geq 1}$, de funciones clase C^2, cada una sub-armónica en $D(0, 1 - 1/1k)$, tal que $u_k(x) \downarrow u(x)$, para todo x en D. Dado que L_{u_k} es una funciónal lineal positiva (por el Teorema 4.7) y $L_{u_k} \to L_u$ se sigue que L_u es una funcional lineal positiva.

Para el caso de D en general, se pasa de $D(0, 1)$ a D usando particiones de la unidad. □

El corolario anterior tiene importantes consecuencias con respecto al Laplaciano de funciones sub-armńicas. A pesar de que éstas no son necesariamente diferenciables, sí van a admitir dérivadas débiles. Dada una función $u : D \to \mathbb{R}$, donde D es un abierto de $\mathbb{R}^2$, decimos que $\nabla^2 u$ existe, en el sentido de distribuciones ó en el sentido débil, si existe una medida regular μ , sobre los Borelianos de $\mathbb{R}^2$, tal que se cumple la siguiente identidad

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla^2 \phi(x, y) u(x, y) dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, y) d\mu(x, y)$$

para toda ϕ clase C^∞, que se anula en el infinito.

En el marco de derivadas débiles, el corolario anterior junto con una aplicación directa del Teorema de Representación de Riesz (Teorema 7.2.8 de [9]) demuestra el siguiente Teorema.

Teorema 4.11. *Se asume que $u : D \to \mathbb{R}$ es sub-armónica y no idénticamente $-\infty$ es un dominio abierto D. Entonces $\nabla^2 u$ existe, en el sentido de distribuciones, y es una medida de Borel regular, llamada medida de Riesz y denotada por $\mu_u = \frac{1}{2\pi} \nabla^2 u$.*

Otra consecuencia útil del Teorema 4.9 es el siguiente corolario.

Corolario 4.12. *Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sub-armónica, no idénticamente $-\infty$, con medida de Riesz $\mu = \frac{1}{2\pi} \nabla^2 u$.*

Para $0 < r < R$, la función $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \log\left(\frac{R}{r}\right), & |(x, y)| \leq r \\ \log\left(\frac{R}{|(x,y)|}\right), & r < |(x, y)| < R \\ 0, & |(x, y)| \leq R \end{cases}$$

satisface

$$m(R, u) - m(r, u) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x, y) d\mu(x, y)$$

Demostración. Ya que la función ψ tiene soporte igual al disco cerrado de radio R, podemos suponer que todas las funciones involucradas tienen soporte contenido en D, el disco cerrado de radio $2R$.

Primero vamos a probar la identidad para funciones clase C^2.

Como u es clase C^2, el teorema de Green implica

$$\int_{D_\rho(0)} \nabla^2 u(x,y)dxdy = \int_{\partial D_\rho(0)} \partial_n u d\sigma$$

donde $\partial_n u$ denota la derivada en dirección de la normal unitaria apuntando hacia afuera y $0 < \rho \leq R$. Tomando la parametrización de la frontera dada por $\gamma(t) = \rho(\cos(t), \sin(t))$ tenemos

$$\int_{\partial D_\rho(0)} \partial_n u d\sigma = \int_0^{2\pi} (\partial_x u \circ \gamma, \partial_y u \circ \gamma) \cdot (\cos(t), \sin(t))\rho dt$$

pero, por la regla de la cadena,

$$(\partial_x u \circ \gamma, \partial_y u \circ \gamma) \cdot (\cos(t), \sin(t)) = \partial_\rho \tilde{u}(r,t).$$

En conclusión, podemos escribir

$$\int_{D_\rho(0)} \nabla^2 u(x,y)\frac{1}{\rho}dxdy = \int_0^{2\pi} \partial_\rho \tilde{u}(\rho,t)dt$$

Si ahora integramos con respecto a ρ y aplicamos el teorema de Fubini al lado derecho de la igualdad anterior tenemos

$$\int_0^R \int_{D_\rho(0)} \nabla^2 u(x,y)\frac{1}{\rho}dxdyd\rho = \int_0^{2\pi} u(r\cos(t), r\sin(t)) - 2\pi u(0,0)$$

lo cual implica que

$$\int_r^R \int_{D_\rho(0)} \frac{\nabla^2 u}{2\pi}\frac{1}{\rho}dxdxd\rho = m(R,u) - m(r,u).$$

Finalmente, re-escribiendo el lado derecho de la igualdad anterior como

$$\int_r^R \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\nabla^2 u(x,y)}{2\pi} \chi_{D_\rho(0)}(x,y)dxdyd\rho$$

y usando el Teorema de Tonelli (recuerdese que $\nabla^2 u \geq 0$) se puede llegar a

$$\begin{aligned} \int_r^R \int_{D_\rho(0)} \frac{\nabla^2 u}{2\pi}\frac{1}{\rho}dxdxd\rho &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\nabla^2 u(x,y)}{2\pi} \int_r^R \chi_{D_\rho(0)}(x,y)\frac{d\rho}{\rho} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x,y)d\mu(x,y). \end{aligned}$$

Esto termina la prueba para el caso de que u es clase C^2.

Para el caso general se usará que las funciones sub-armónicas, no idénticamente $-\infty$, son integrables sobre conjuntos compactos (Lema 4.6).

Para empezar el caso general, por el Teorema 4.9, existe una sucesión, $(u_n : D(0, \frac{3}{2}R) \to \mathbb{R})_{n\geq 1}$, de funciones clase C^2 tales que u_n converge a u, puntualmente y de manera decreciente.

Por el caso C^2 se tiene

$$m(R,u_n) - m(r,u_n) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x,y)d\mu_{u_n}(x,y).$$

Por el teorema de la convergencia monótona, y le hecho de que u es integrable sobre compactos, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} m(R,u_n) - m(r,u_n) = m(R,u) - m(r,u).$$

Para terminar resta probar que

$$\lim_{n\to\infty} L_{u_n}(\psi) = L_u(\psi)$$

donde $L_{u_n}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi d\mu_{u_n}$ y $L_u(\psi) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi d\mu_u$. Por el coroloario anterior tanto las L_{u_n} como la L_u son funcionales lineales positivas.

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, es posible construir funciones C^∞, de soporte compacto contenido en el disco cerrado $\overline{D}(0,(3/2)R)$, $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que satisfacen

$$\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2, \quad L_u(\psi_2) - \varepsilon < L_u(\psi) < L_u(\psi_1) + \varepsilon$$

Ahora, como ψ_i es clase C^∞ y los soportes están contenidos es un mismo compacto, se tiene que

$$L_{u_n}(\psi_i) = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^2 \psi_i u_n dxdy \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^2 \psi_i u dxdy = L_u(\psi_i)$$

Por lo tanto, existe una N tal que para $n \geq N$ se tiene

$$L_{u_n}(\psi_2) - \varepsilon < L_u(\psi) < L_{u_n}(\psi_1) + \varepsilon \tag{8}$$

Finalmente, tomando en cuenta de que L_{u_n} es positiva se tiene $L_{u_n}(\psi_1) \leq L_{u_n}(\psi) \leq L_{u_n}(\psi_2)$ que junto con (8) implica, para $n \geq N$,

$$|L_{u_n}(\psi) - L_u(\psi)| < 2\varepsilon$$

lo cual concluye la prueba de que $\lim_{n\to\infty} L_{u_n}(\psi) = L_u(\psi)$.

□

5. La medida de Brown

En ésta sección se usan las herramientas presentadas previamente para presentar la construcción de la medida de Brown para operadores. Por (M,τ) se denota una álgebra de von Neumann finita con τ una traza fiel y normal.

Lema 5.1. *Sean a y b elementos de M y sea $\varepsilon > 0$. Se definen funciones $g, g_\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dadas por*

$$g_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2}\tau[\log((a-\lambda b)^*(a-\lambda b) + \varepsilon 1)]$$
$$g(\lambda) = \log(\Delta(a-\lambda b)) = \tau[\log|a-\lambda b|]$$

Entonces g_ε es sub-armónica y, si $g(\lambda) > -\infty$, para alguna λ, también g es sub-armónica.

Demostración. Primero se probará que g_ε es clase C^2.

Escríbase $x_1 = \Re(\lambda), x_2 = \Im(\lambda)$. Con ésta notación puede pensarse a g_ε como una función $(x_1,x_2) \mapsto g_\varepsilon(x_1 + ix_2)$. Por otro lado se definen

$$h(\lambda) := (a-\lambda b)(a-\lambda b)^* + \varepsilon 1$$
$$k(\lambda) := (a-\lambda b)^*(a-\lambda b) + \varepsilon 1$$

Nótese que $h(\lambda)$ es un polinomio en las variables x_1, x_2 con coeficientes en M, que $h(\lambda)$ es autoadjunto y que, para toda λ, $h(\lambda) \geq \varepsilon$. Esta última desigualdad tiene importantes consecuencias: primeramente el espectro de $h(\lambda)$ está contenido en el semiplano determinado por $\Re(z) > \varepsilon/2$; en segundo lugar, también se tiene que $h(\lambda)$ es invertible y, finalmente, el elemento $\log(h(\lambda))$ está bien definido (donde $\log(z)$ es analítica en el semiplano $\Re(z) > \varepsilon/2$). Además, con esta notación se puede escribir $g_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2}\tau[\log(h(\lambda))]$.

Para λ fijo, tomense curvas γ_i, definidas es un intervalo abierto alrededor del cero, que satisface $\gamma_i(0) = \lambda$ y $\gamma_i'(0) = e_i$, (vector canónico en $\mathbb{R}^2$) y definase $x(t) = h(\gamma_i(t))$. Ya que los espectros de los elementos $x(t)$ están contenidos en la región donde log es analítica, podemos aplicar el Lema 3.3 para concluir que $\partial_{x_i} g_\varepsilon$ existe y

$$\partial_{x_i} g_\varepsilon = \frac{1}{2}\tau[h^{-1}\partial_{x_i} h].$$

Continuando con los mismos argumentos se puede probar que las parciales $\partial_{x_i,x_j} g_\varepsilon$ existen y están dadas por la fórmula

$$\partial^2_{x_i,x_j} g_\varepsilon = \frac{1}{2}\tau\Big[- h^{-1}(\partial_{x_i} h)h^{-1}(\partial_{x_j} h) + h^{-1}(\partial^2_{x_i,x_j} h)\Big] \tag{9}$$

Con lo anterior se termina la prueba de que g_ε es clase C^2.

A continuación se procede a probar que $\nabla^2 g_\varepsilon \geq 0$, que gracias a Teorema 4.7, es equivalente a probar que g_ε es sub-armónica.

Con la notación de variable compleja se escribe

$$\partial_\lambda g_\varepsilon = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} g_\varepsilon - i\partial_{x_2} g_\varepsilon), \quad \partial_{\overline{\lambda}} g_\varepsilon = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} g_\varepsilon + i\partial_{x_2} g_\varepsilon)$$

y es conocido que se cumple

$$\nabla^2 g_\varepsilon = 4\partial^2_{\lambda\lambda} g_\varepsilon.$$

La ecuación (9) implica que

$$\partial^2_{\lambda\lambda} g_\varepsilon = \frac{1}{2}\tau\Big[- h^{-1}(\partial_{\overline{\lambda}} h)h^{-1}(\partial_\lambda h) + h^{-1}(\partial^2_{\overline{\lambda}\lambda} h)\Big] \tag{10}$$

Pero

$$h(\lambda) = a^*a - \lambda a^*b - \overline{\lambda} b^*a + |\lambda|^2 b^*b + \varepsilon 1$$

por lo que

$$\begin{aligned} \partial_\lambda h &= -a^*b + \overline{\lambda} b^*b = -(a - \lambda b)^*b \\ \partial_{\overline{\lambda}} h &= -b^*a + \lambda b^*b = -b^*(a - \lambda b) \\ \partial^2_{\overline{\lambda}\lambda} h &= bb^*. \end{aligned}$$

Aplicando la identidad $x(x^*x + \varepsilon 1)^{-1} = (xx^* + \varepsilon 1)^{-1}x$, con $x = a - \lambda b$, se deduce que

$$\begin{aligned} \partial^2_{\overline{\lambda}\lambda} h - (\partial_{\overline{\lambda}} h)h^{-1}(\partial_\lambda h) &= b^*b - b^*x(x^*x + \varepsilon 1)^{-1}x^*b \\ &= b^*b - b^*(xx^* + \varepsilon 1)^{-1}xx^*b \\ &= bb^* - b^*(1 - \varepsilon(xx^* + \varepsilon 1)^{-1})b \\ &= \varepsilon b^*(xx^* + \varepsilon 1)^{-1}b = \varepsilon b^*k^{-1}b. \end{aligned}$$

Por lo tanto, junto con la ecuación (10), concluimos que

$$\partial^2_{\lambda\lambda} g_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}\tau[h(\lambda)^{-1}b^*k(\lambda)^{-1}b] = \frac{\varepsilon}{2}\tau[h(\lambda)^{-1/2}b^*k(\lambda)^{-1}bh(\lambda)^{-1/2}] \geq 0$$

Esto termina la prueba de que g_ε es sub-armónica.

Para analizar la función g, al igual que antes, se denota $x = a - \lambda b$ y se observa que

$$g_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^{\|x\|} \log(t^2+\varepsilon) d\mu_{|x|}(t)$$

y

$$g(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^{\|x\|} \log(t^2) d\mu_{|x|}.$$

Por lo tanto, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} g_\varepsilon = g$, donde el límite es decreciente. Entonces, si g no es idénticamente $-\infty$, se puede concluir que g es sub-armónica. □

Proposición 5.2. *Para T en M, se define $f_T := f : \mathbb{C} \to [-\infty, \infty)$, mediante*

$$f(\lambda) := \log \Delta(T - \lambda) = \tau[\log|T - \lambda 1|].$$

La función f es sub-armónica no idénticamente $-\infty$.

Demostración. Por el Lema (5.1) es suficiente probar que $f(\lambda) > -\infty$ para alguna λ.

Para empezar se definen operadores T_1, T_2 en M mediante

$$T_1 = T(T^*T + 1)^{-1/2}, \quad T_2 = (T^*T + 1)^{-1/2}.$$

Obsérvese que $T - \lambda = (T_1 - \lambda T_2)T_2^{-1}$ y $\Delta(T_2) > 0$, (por Lema 3.4). Por lo tanto, el Teorema 3.10 implica $\Delta(T - \lambda) = \Delta(T_1 - \lambda T_2)\Delta(T_2)^{-1}$ que se puede expresar como

$$f(\lambda) = \log(\Delta(T_1 - \lambda T_2)) - \log(\Delta(T_2)).$$

Consideremos la función $h(\lambda) := \log(\Delta(T_2 - \lambda T_1)) - \log(\Delta(T_2))$. Ya que $h(0) = 0$, el Lema 5.1 implica que h es sub-armónica, en particular no es idénticamente $-\infty$.

Finalmente, por la identidad

$$f(\lambda) = h(1/\lambda) + \log|\lambda|$$

válida para $\lambda \neq 0$, concluimos que f es sub-armómnica. □

Ahora podemos dar la definición formal de la medida de Brown de un operador.

Definición 5.3. *Sea T un operador en M. La medida de distribución espectral de Brown, o simplemente la medida de Brown de T es la medida μ_T tal que, en sentido débil, $\mu_T = \frac{1}{2\pi}\nabla^2 f$, con $f(\lambda) := \tau[\log|T - \lambda|]$. Nótese que la definición tiene sentido precisamente por la Proposición 5.2 junto con el Teorema 4.11.*

En lo que sigue, se presentarán algunas propiedades de la medida de Brown.

Recordamos que, dada μ, una medida sobre los Borelianos de $\mathbb{C}$, y una función Borel medible $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, el push-forward de μ con respecto a h, es la medida que asigna $\mu(h^{-1}(E))$, para cada Boreliano E, de $\mathbb{C}$.

Primero, se verá el comportamiento de la medida de Brown bajo translaciones.

Proposición 5.4. *Sea T un operador en M, $\rho, \lambda \in \mathbb{C}$ con $\rho \neq 0$. La medida de Brown de $\mu_{\rho T+\lambda 1}$ es el push-forward de μ_T con respecto a $z \mapsto \rho z + \lambda$.*

Demostración. Usando la versión C^∞ del Lema de Urysohn, y tomando en cuenta de que se trabajan con medidas de probabilidad, es suficiente probar que

$$\int_{\mathbb{C}} \phi(\rho z + \lambda) d\mu_T(z) = \int_{\mathbb{C}} \phi(z) d\mu_{\rho T+\lambda 1}(z)$$

para toda $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, clase C^∞ de soporte compacto.

Denotemos $\varphi(z) := \phi(\rho z + \lambda 1)$. Si denotamos $f_T(z) = \tau[\log|T - z1|]$, por definición de μ_T,

$$\int_{\mathbb{C}} \varphi(z) d\mu_T(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \nabla^2 \varphi(z) f_T(z) dz$$

Pero $\nabla^2 \varphi(z) = |\rho|^2 \nabla^2 \phi(\rho z + \lambda)$, asi que tomando el cambio de variable $w = \rho z + \lambda$ se sigue que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} \phi(\rho z + \lambda) d\mu_T(z) &= \int_{\mathbb{C}} \varphi(z) d\mu_T(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} |\rho|^2 \nabla^2 \phi(w) f_T\left(\frac{w-\lambda}{r}\right) \frac{dw}{|\rho|^2} \\
&= \int_{\mathbb{C}} \nabla^2 \phi(w) \tau\left[\log\left|T - \frac{w-\lambda}{\rho}\right|\right] dw \\
&= \int_{\mathbb{C}} \nabla^2 \phi(w) \left\{\tau[\log|\rho T + \lambda - w|] - \log(|\rho|)\right\} dw \\
&= \int_{\mathbb{C}} \nabla^2 \phi(w) f_{\rho T+\lambda 1}(w) dw + \log(|\rho|) \int_{\mathbb{C}} \nabla^2 \phi(w) dw \\
&= \int_{\mathbb{C}} \phi(w) d\mu_{\rho T+\lambda 1}(w)
\end{aligned}$$

(pues el Teorema de Green implica $\int_{\mathbb{C}} \nabla^2 \phi(w) dw = 0$, al ser ϕ calse C^∞ de soporte compacto).

□

El siguiente teorema caracteriza la medida de Brown de un operador.

Teorema 5.5. *Sea T un operador en M y $\mu = \mu_T$ la medida de Brown de T.*

Entonces μ es la única medida de probabilidad en $\mathbb{C}$ que satisface:

1. *$\int_{\mathbb{C}} \log^+|z| d\mu(z) < \infty$;*
2. *para toda λ complejo,*

$$\tau[\log|T - \lambda|] = \int_{\mathbb{C}} \log|z - \lambda| d\mu(z).$$

Demostración. • Primero se probará que $\mu(\mathbb{C}) = 1$.

Tomar $f(\lambda) = f_T(\lambda) = \tau[\log|T - \lambda 1|]$.

Para $R > 1$ se define

$$\psi_R(x,y) = \begin{cases} \log(R), & |(x,y)| \leq 1, \\ \log\left(\frac{R}{|(x,y)|}\right), & 1 < |(x,y)| < R, \\ 0, & |(x,y)| \leq R. \end{cases}$$

Por el Corolario 4.12 se cumple

$$\int_{\mathbb{C}} \psi_R(x,y)dxdy = m(R,f) - m(1,f).$$

Ahora, nótese que $\frac{1}{\log(R)}\psi_R$ tiende, de manera decreciente cuando $R \to \infty$, a la función constante 1. Entonces, se sigue del Teorema de la Convergencia Monótona que

$$\mu(\mathbb{C}) = \lim_{R\to\infty} \frac{m(R,f) - m(1,f)}{\log(R)}.$$

Asi pues, para probar que μ es una medida de proba, es suficiente probar que

$$\lim_{R\to\infty} (m(R,f) - \log(R)) = 0.$$

Para ésto último, obsérvese que de la prueba de la Proposición 5.2 se tiene

$$f(\lambda) = h\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \log|\lambda|, \quad \lambda \neq 0$$

donde h es sub-armónica y está dada por $h(\lambda) = \tau[\log|T_2 - \lambda T_1|] - \tau[\log|T_2|]$, (con $T_1 = T(T^*T+1)^{-1/2}$, $T_2 = (T^*T+1)^{1/2}$). Se sigue que

$$m(R,f) = m\left(\frac{1}{R}, h\right) + \log(R)$$

Por lo tanto, aplicando Proposición 4.8 se concluye que

$$\lim_{R\to\infty} (m(R,f) - \log(R)) = \lim_{R\to\infty} m\left(\frac{1}{R}, h\right) = h(0) = 0.$$

• Ahora se probará que:

$$\int_{\mathbb{C}} \log^+|z| d\mu(z) < \infty$$

Para ésta parte defínase, $\omega_R(z) = \log(R) - \psi_R(z)$ para z complejo. Entonces se cumple que $\omega_R(z)$ convrege de manera creciente a $\log^+|z|$, cuando $R \to \infty$ y por lo tanto el Lema 4.12 implica

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} \log^+|z| d\mu(z) &= \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{C}} \omega_R(z) d\mu(z) \\ &= \lim_{R\to\infty} (\log(R) - m(R,f) + m(1,f)) \\ &= m(f,1) \end{aligned}$$

y como f es sub-armónica concluimos (Lema 4.6) que $m(f,1) < \infty$.

• Para demostrar $\tau[\log(|T-\lambda|)] = \int_{\mathbb{C}} \log|z-\lambda| d\mu(z)$, es suficiente probar el caso $\lambda = 0$, pues por la proposición 5.4 se vale:

$$\int_{\mathbb{C}} \log|z-\lambda| d\mu_T(z) = \int_{\mathbb{C}} \log|z| d\mu_{T-\lambda}(z).$$

Para el caso $\lambda = 0$ necesitamos calcular $\int_{\mathbb{C}} \log^{\pm}|z| d\mu(z)$. Pero, ya sabemos que

$$\int_{\mathbb{C}} \log^{+}|z| d\mu(z) = m(f,1).$$

Por otro lado, considérese la función

$$\xi_r(z) = \begin{cases} \log(1/r), & |z| \leq r, \\ \log(1/|z|), & r < |z| \leq 1, \\ 0, & |z| \geq 1. \end{cases}$$

Se sigue que $\xi_r(z)$ tiende, de manera creciente, a $\log^{-}|z|$, cuando $r \to 0$. Por lo tanto el Corolario 4.12 y la Proposición 4.8 implican

$$\int_{\mathbb{C}} \log^{-}|z| d\mu(z) = \lim_{r\to 0} \int_{\mathbb{C}} \xi_r(z) d\mu(z) = \lim_{r\to 0} (m(1,f) - m(r,f)) = m(1,f) - f(0).$$

Se concluye que

$$\int_{\mathbb{C}} \log|z| d\mu(z) = m(1,f) - (m(1,f) - f(0)) = f(0) = \tau[\log|T|]$$

• **Unicidad**

Suponemos que ν es una medida de probabilidad sobre los Borelianos de $\mathbb{C}$ que satisface:

1. $\int_{\mathbb{C}} \log^{+}|z| d\nu(z) < \infty$;
2. para toda λ complejo, $\tau[\log(|T-\lambda|)] = \int_{\mathbb{C}} \log|z-\lambda| d\nu(z)$.

Ya que μ y ν son medidas de probabilidad, para probar que son iguales es suficiente probar (gracias al lema de Urysohn) que:

$$\int_{\mathbb{C}} \phi(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \phi(z) d\nu(z)$$

donde ϕ es una función continua, con soporte compacto, arbitraria. Además, ya que las funciones clase C^{∞} son uniformemente densas en las funciones continuas con soporte compacto, podemos suponer adicionalmente que ϕ es clase C^{∞}.

Consideramos la función de Green $w \mapsto \frac{1}{2\pi} \log|w-z|$, que tiene Laplaciano (en el sentido distribucional) igual a la delta de Dirac δ_z. Por lo tanto podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} \phi(z) d\nu(z) &= \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{\mathbb{C}} \phi(\lambda) \delta_z(\lambda) \right) d\nu(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{\mathbb{C}} \nabla^2 \phi(\lambda) \log|z-\lambda| d\lambda \right) d\nu(z). \end{aligned}$$

Supongamos por un momento que la función $(\lambda, z) \mapsto \nabla^2 \phi(\lambda) \log|z-\lambda|$ es integrable con respecto a la medida producto $d\lambda \times \nu$. Entonces podemos aplicar Fubinni para obtener,

$$\int_{\mathbb{C}} \phi(z)d\nu(z) \quad = \quad \int_{\mathbb{C}} \nabla^2\phi(\lambda) \left(\int_{\mathbb{C}} \log|z-\lambda| d\nu(z) \right) d\lambda.$$

Usando que ν satisface $\tau[\log(|T-\lambda|)] = \int_{\mathbb{C}} \log|z-\lambda| d\nu(z)$ concluimos

$$\int_{\mathbb{C}} \phi(z)d\nu(z) = \int_{\mathbb{C}} \nabla^2\phi(\lambda)\tau[\log(|T-\lambda|)]d\lambda.$$

De manera similar, intercambiando el papel de ν por el de μ, también llegamos a que

$$\int_{\mathbb{C}} \phi(z)d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \nabla^2\phi(\lambda)\tau[\log(|T-\lambda|)]d\lambda.$$

Resta probar que la función $(\lambda, z) \mapsto \nabla^2\phi(\lambda)\log|z-\lambda|$ es integrable con respecto a la medida producto $d\lambda \times \sigma$, donde $\sigma = \nu$ ó μ. Para éste fin defínase

$$h(\lambda, z) = \log(|\lambda|+1) + \log^+|z| - \log|z-\lambda|.$$

La función h es mayor o igual a cero pues

$$\log|z-\lambda| \leq \log(|z|+|\lambda|) \leq \log\left((|\lambda|+1)\,\text{máx}\{1,|z|\}\right) = \log(|\lambda|+1)+\log^+(|z|)$$

Además, ya que ϕ tiene soporte compacto y la medida σ es de proba, la función $\nabla^2\phi(\lambda)\log|z-\lambda|$ es $(d\lambda \times \sigma)$-integrable si y sólo si la función $\nabla^2\phi(\lambda)h(\lambda, z)$ lo es.

Ya que se cambió $\log|z-\lambda|$ por una función mayor o igual a cero, se va a hacer algo similar con $\nabla^2\phi$. Sea $M = \|\nabla^2\phi\|_\infty$ y sea $\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función de soporte compacto, clase C^∞, que satisfaga: $0 \leq \xi \leq 1$ y $\xi = 1$ en el soporte de $\nabla^2\phi$. Defínanse $\psi_1 := \frac{1}{2}(M + \nabla^2\phi)\xi$, $\psi_2 := \frac{1}{2}(M - \nabla^2\phi)\xi$. Entonces ambas ψ_1 y ψ_2 son funciones clase C^∞, de soporte compacto, mayores o iguales a cero y $\nabla^2\phi = \psi_1 - \psi_2$.

Para probar que $\nabla^2\phi(\lambda)h(\lambda, z)$ es integrable es suficiente probar que $\psi_i h$, $i = 1, 2$, son integrables.

Ya que $\psi_i h \geq 0$, por Tonelli:

$$\int_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} h(\lambda, z)\psi_i(\lambda)d\lambda \times d\sigma = \int_{\mathbb{C}} \psi_i(\lambda) \left(\int_{\mathbb{C}} h(\lambda, z)d\sigma(z) \right) d\lambda.$$

Pero $\int_{\mathbb{C}} h(\lambda, z)d\sigma(z) = \log(|\lambda|+1) + \int_{\mathbb{C}} \log^+|z| d\sigma(z) - \tau[\log(|T-\lambda|)]$ y por la Proposición 5.2 la función $\lambda \mapsto \tau[\log|T-\lambda|]$ es sub-armónica, no idénticamente $-\infty$, por lo que el Lema 4.6 implica que es localmente integrable y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{C}} \psi_i(\lambda) \left(\int_{\mathbb{C}} h(\lambda, z)d\sigma(z) \right) d\lambda < \infty.$$

□

Observación 5.6. *Nótese que si T es desde un principio un operador normal, el cálculo funcional junto con la unicidad del Teorema 5.5, implican que la medida de Brown de T es simplemente componer τ con E_T (la resolución de la identidad para T).*

Para terminar las notas se presentan algunas propiedades de la medida de Brown.

Proposición 5.7. *Dado T en M, el soporte de μ_T está contenido en el espectro de T.*

Demostración. Por $\sigma(a)$ denotamos el espectro de un elemento a.

Tomamos z en la resolvente de T y denotamos $S = T - z1$. Entonces S es invertible y $\rho := d(0, \sigma(S))$ es positivo. Si probamos que

$$\mu_S(B_\rho(0)) = 0, \tag{11}$$

entonces, de la Proposición 5.4, se sigue que $\mu_T(B_\rho(z)) = 0$, por lo que z no está en el soporte de μ_T, probando que el soporte de μ_T está contenido en $\sigma(T)$.

Para demostrar (11) primero notamos que

$$f(\lambda) := \tau[\log|S - \lambda 1|],$$

es armónica en $B_\rho(0)$. En efecto, en el Lema 5.1, tomando $a = S$, $b = 1$ y $\varepsilon = 0$, se tiene que (con la misma notación que en el lema)

$$\partial^2_{\bar\lambda\lambda} h - (\partial_\lambda h) h^{-1} (\partial_\lambda h) = 0$$

por lo que $\nabla^2 f(\lambda) = 0$ en $B_\rho(0)$, es decir, f es armónica en $B_\rho(0)$ (note que se toma $\varepsilon > 0$ en el lema para que el elemento dentro del logaritmo sea invertible, en nuestro caso se puede tomar $\varepsilon = 0$ pues $S - z$ es invertible para $z \in B_\rho(0)$).

Ya que $\mu_S = \frac{1}{2\pi}\nabla^2 f$, en el sentido dédil y $\nabla^2 f = 0$ en $B_\rho(0)$, se tiene que $\mu_S(B_\rho(0)) = 0$. En efecto, para probarlo tomamos $0 < r < \rho$ y ψ, clase C^∞ con $0 \le \psi \le 1$, $\psi \equiv 1$ en $B_r(0)$, con soporte contenido en $B_\rho(0)$. Por definición de μ_S se tiene

$$\int_{\mathbb{C}} \psi(\lambda) d\mu_S(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \nabla^2 \psi(\lambda) f(\lambda) d\mu(\lambda)$$

Por la identidades de Green, usando que ψ se anula en un abierto contenido en $B_\rho(0)$ se tiene

$$\int_{\mathbb{C}} \nabla^2 \psi(\lambda) f(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{C}} \psi(\lambda) \nabla^2 f(\lambda) d\lambda = 0$$

Por lo tanto $\mu_S(B_r(0)) = 0$ y, haciendo $r \to \rho$, concluimos (11).

□

Proposición 5.8. *Para T en M y $p(z)$ en $\mathbb{C}[z]$, $\mu_{p(T)}$ es el push-forward de μ_T via la función $z \mapsto p(z)$.*

Demostración. Sea ν el push-forward de μ_T via $p(z)$. Por el Teorema 5.5 es suficiente probar

$$\int_{\mathbb{C}} \log^+|z| d\nu(z) < \infty \tag{12}$$

y que, para toda λ complejo,

$$\int_{\mathbb{C}} \log|z - \lambda| d\nu(z) = \tau[\log|p(T) - \lambda|]. \tag{13}$$

Para probar (12), notamos que, al ser ν el push-forward de $z \mapsto p(z)$, se cumple

$$\int_{\mathbb{C}} \log^+ |z| d\nu(z) = \int_{\mathbb{C}} \log^+ |p(z)| d\mu_T(z).$$

Si m es el grado de $p(z)$, existe una constante $K > 1$ tal que $|p(z)| \leq K|z|^m$, para z en $C = \{z : |z| \geq 1\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} \log^+ |z| d\nu(z) &= \int_C \log^+ |z| d\nu(z) \\ &\leq \int_C \log^+(K|z|^m) d\mu_T(z) \\ &= \log(K)\mu_T(C) + m \int_C \log^+ |z| d\mu_T(z) < \infty \end{aligned}$$

Para probar (13), dado $\lambda \in \mathbb{C}$ sean $p_\lambda(z) = p(z) - \lambda$ y $\theta_1(\lambda), \ldots, \theta_m(\lambda)$ las raíces de $p_\lambda(z)$. Ya que $p_\lambda(z) = \alpha \Pi_{k=1}^m (z - \theta_k(\lambda))$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} \log |z - \lambda| d\nu(z) &= \int_{\mathbb{C}} \log |\alpha \Pi_{k=1}^m (z - \theta_k(\lambda))| \, d\mu_T(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \log |\alpha| + \sum_{k=1}^m \log |z - \theta_k(\lambda)| d\mu_T(z) \\ &= \log |\alpha| + \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{C}} \log |z - \theta_k(\lambda)| d\mu_T(z) \\ &= \log |\alpha| + \sum_{k=1}^n \log \Delta(T - \theta_k(\lambda)) \\ &= \log \left(\alpha \Pi_{k=1}^n \Delta(T - \theta_k(\lambda))\right) \\ &= \log \Delta(p(T) - \lambda) \\ &= \tau[\log |p(T) - \lambda|] \end{aligned}$$

□

Corolario 5.9. *Para T en M y $p(z)$ en $\mathbb{C}[z]$,*

$$\tau[p(T)] = \int_{\mathbb{C}} p(z) d\mu_T(z)$$

Demostración. Por la propisición enterior, para todo polinomio q:

$$\tau[\log |q(T)|] = \int_{\mathbb{C}} \log |q(z)| d\mu_T(z)$$

Reemplazando q por los polinomios de Taylor de e^z, tomando en cuenta que el soporte de μ_T está contenido en el compacto $\sigma(T)$ y tomando límite cuando el grado de los polinomios de Taylor tiende a infinito, concluimos que:

$$\tau[\log |e^T|] = \int_{\mathbb{C}} \log |e^z| d\mu_T(z).$$

Usando que $\log|e^T| = Re(T)$, $\log|e^z| = Re(z)$ concluimos

$$\tau[Re(T)] = \int_{\mathbb{C}} Re(T) d\mu_T(z)$$

Un argumento similar, ahora utilizando los polinomios de Taylor de e^{-iz}, arroja que

$$\tau[Im(T)] = \int_{\mathbb{C}} Im(T) d\mu_T(z).$$

Por lo tanto, hemos demostrado el resultado para cuando $p(z) = z$. Pero, el resultado para p general resulta de usar que $\mu_{p(T)}$ es el push-forward de μ_T via p.

□

Proposición 5.10. *Si $T \in M$ es invertible, entonces $\mu_{T^{-1}}$ es el push-forward de μ_T via $z \mapsto z^{-1}$.*

Demostración. Ya que T es invertible, la distancia del 0 al soporte de μ_T, denotada ρ, es positiva y por lo tanto el push-forward de μ_T via $z \mapsto z^{-1}$ está bien definido. Denotemos por ν a dicho push-forward.

Según el Teorema 5.5, para probar que $\nu = \mu_{T^{-1}}$ necesitamos probar

$$\int_{\mathbb{C}} \log^+|z| d\nu(z) < \infty$$

y que, para toda $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\tau[\log|T^{-1} - \lambda 1|] = \int_{\mathbb{C}} \log|z - \lambda| d\nu(z)$$

Para la primera tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} \log^+|z| d\nu(z) &= \int_{\mathbb{C}} \log\left|\frac{1}{z}\right| d\mu_T(z) \\ &= -\int_{\rho\leq|z|\leq 1} \log|z| d\mu_T(z) < \infty\end{aligned}$$

Para probar la segunda, primero suponemos que $\lambda \neq 0$. Usando que $\Delta(T^{-1}) = \Delta(T)^{-1}$, se tiene que $-\int_{\mathbb{C}} \log|z| d\mu_T(z) = \tau[\log|T|^{-1}]$, por lo que:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} \log|z - \lambda| d\nu(z) &= \int_{\mathbb{C}} \left|\frac{1}{z} - \lambda\right| d\mu_T(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \log\left|\lambda\left(z - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{z}\right| d\mu_T(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \log|\lambda| + \log\left|z - \frac{1}{\lambda}\right| - \log|z| d\mu_T(z) \\ &= \log\Delta(\lambda) + \log\Delta\left(T - \frac{1}{\lambda}\right) - \log\Delta(T) \\ &= \log\Delta\left(\lambda\left(T - \frac{1}{\lambda}1\right)T^{-1}\right) \\ &= \log\Delta(T^{-1} - \lambda 1) \\ &= \tau[\log|T^{-1} - \lambda 1|]\end{aligned}$$

Para el caso $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} \log|z|\nu(z) &= -\int_{\mathbb{C}} \log|z| d\mu_T(z) \\ &= -\log\Delta(T) = \log\Delta(T^{-1}) \\ &= \tau[\log|T^{-1}|]\end{aligned}$$

□

Teorema 5.11. *Sea h holomorfa en una vecindad de $\sigma(T)$. Por $h(T)$ denotamos el cálculo funcional holomorfo de T. Entonces*

$$\tau[h(T)] = \int_{\mathbb{C}} h(z) d\mu_T(z)$$

Demostración. Recordemos que, por definición de $h(T)$,

$$\tau[h(T)] = \tau\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma h(\lambda)(\lambda - T)^{-1} d\lambda\right]$$

donde γ es una curva, C^1 por trozos, contenida en el dominio de h y que contiene al espectro de T en su interior.

Por linealidad de τ

$$\tau[h(T)] = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma h(\lambda)\tau[(\lambda - T)^{-1}] d\lambda.$$

Ahora, por la Proposición 5.10 y un argumento similar a la demostración del Corolario 5.9, para toda λ en la resolvente de T se cumple

$$\tau[(\lambda - T)^{-1}] = \int_{\mathbb{C}} (\lambda - z)^{-1} d\mu_T(z)$$

por lo tanto podemos escribir

$$\tau[h(T)] = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \int_{\mathbb{C}} h(\lambda)(\lambda - z)^{-1} d\mu_T(z) d\lambda.$$

Ya que la función $(\lambda, z) \mapsto h(\lambda)(z - \lambda)^{-1}$ es continua en el compacto $\gamma \times \sigma(T)$, y $d\lambda d\mu_T(z)$ es una medida finita, podemos cambiar el orden de integración para obtener

$$\tau[h(T)] = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h(\lambda)}{(\lambda - z)^{-1}} d\lambda d\mu_T(z) = \int_{\mathbb{C}} h(z) d\mu_T(z)$$

□

Teorema 5.12. *Sea T en M y h una función holomorfa con dominio un abierto conexo que contenga a $\sigma(T)$. Entonces $\mu_{h(T)}$ es el pull-forward de μ_T via h.*

Demostración. Por ν denotamos el pull-forward de μ_T via h. Por el Teorema 5.5, para probar $\nu = \mu_{h(T)}$ debemos de probar

$$\int_{\mathbb{C}} \log^+|z|\nu(z) < \infty \tag{14}$$

y que, para toda $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\tau[\log|h(T) - \lambda|] = \int_{\mathbb{C}} \log|z - \lambda| d\nu(z). \tag{15}$$

Primero procedemos a probar (15). Primero se observa que, usando la Proposición 5.4, se puede reducir al caso $\lambda = 0$. Además, por la definición de push-forward, podemos cambiar $\log|z|d\nu(z)$ por $\log|h(z)|d\mu_T(z)$. Asi pues, debemos de probar

$$\tau[\log|h(T)|] = \int_{\mathbb{C}} \log|h(z)|d\mu_T(z). \tag{16}$$

Para probar (16), notamos que ambos lados son multiplicativos. Es decir, si podemos escribir $h = h_1h_2$, con h_1, h_2 funciones holomorfas en una vecindad de $\sigma(T)$ y tanto h_1 como h_2 satisfacen (16), entonces h también satisface (16).

Con la observación anterior podemos reducir la prueba de (16) al caso cuando h nunca se anula: en efecto, si h no es idénticamente cero, pero se anula en algunos puntos, podemos escribir

$$h(z) = (z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2}\cdots(z-\alpha_k)^{m_k}h_2(z)$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son los ceros de h y h_1 es holomorfa y nunca se anula. Finalmente, la función $h_1(z) = (z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2}\cdots(z-\alpha_k)^{m_k}$ satisface (16) por la Proposición 5.8.

Asi pues, para probar (16) vamos a suponer que h nunca se anula.

Caso 1. Podemos escribir $h(z) = e^{g(z)}$, donde g es analítica en una vecindad que contenga a $\sigma(T)$. En este caso (16) se transforma en

$$\tau[Re(f(T))] = \int_{\mathbb{C}} Re(h(z))d\mu_T(z)$$

la cual es válida por el Teorema 5.11.

Caso 2. Cuando h no es la exponencial de una función holomorfa. En éste caso, primero vamos a probar que h se puede escribir como

$$h(z) = \frac{1}{z-w_1}\frac{1}{z-w_2}\cdots\frac{1}{z-w_n}e^{g(z)} \tag{17}$$

donde g es analítica en una vecindad que contenga a $\sigma(T)$ y $w_1, \ldots, w_n$ no pertenecen al dominio de h (y por lo tanto, están en la resolvente de T).

Para probar (17), comenzamos restringiendo el domino de h para tomar V, un abierto conexo tal que $\sigma(T) \subset V$, el complemento de V tenga un número finito de componentes conexas, h sea continua en la cerradura de V y holomorfa en V. Consideramos el grupo topológico

$$\mathcal{G} = \{f : \overline{V} \to \mathbb{C} : f \text{ es continua y nunca se anula en } \overline{V}\ \}$$

dotado con multiplicación usual de funciones y con la norma uniforme.

Por $\mathcal{G}_0$ denotamos la componente conexa de la indentidad en $\mathcal{G}$. Por el Corolario 2.15 de [3], que se sabe que

$$\mathcal{G}_0 = \{e^{g(z)} : g : \overline{V} \to \mathbb{C} : g \text{ es continua en } \overline{V}\}.$$

Ahora, por el Corolario 2.19 de [3], $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$ es isomorfo a $\check{H}^1(\overline{V}, \mathbb{Z})$ (el primer grupo de cohomology de Čech). Pero $\check{H}^1(\overline{V}, \mathbb{Z})$ es isomorfo al grupo abeliano libre generado por las componentes conexas del complemento de $\overline{V}$ (por el Teorema de dualidad de Alexander). Entonces

$$[h] = \left[\frac{1}{z-w_1}\right]\left[\frac{1}{z-w_n}\right]\cdots\left[\frac{1}{z-w_n}\right]$$

para algunos w_i en el complemento de $\overline{V}$ (donde $[f]$ representa la clase de f en $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$) lo cual implica (17).

Finalmente, el segundo caso se obtiene de (17) combinando el primer caso, la Proposición 5.10 y la propiedad multiplicativa de (16).

Resta probar (14). Usando la desigualdad

$$\log^+ |ab| \leq \log^+ |a| + \log^+ |b|$$

y siguiendo un argumento similar al de la demostración de (15), es suficiente probar (14) para los casos: h un polinomio, $h(z) = e^{g(z)}$, $h(z) = \frac{1}{z-w}$. Pero éstos son consecuencia de la Proposición 5.8, Teorema 5.11 y Proposición 5.10, respectivamente. □

6. Apéndice

Definición 6.1. *Una álgebra de Banach es un espacio de Banach sobre* $\mathbb{C}$*, aquí denotado por* $(A, \|\cdot\|)$*, dotado con una multiplicación, que es asociativa, distributiva y que satisface*

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad \textit{para toda } a, b \in A$$

Definición 6.2. *En una álgebra de Banach,* $(A, \|\cdot\|)$*, dado* $a \in A$ *(arbitrario) se define la exponencial de* a*, denotada* $Exp(a)$*, como*

$$Exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

Definición 6.3. *Sea* $(A, \|\cdot\|)$ *una álgebra de Banach y* U*, un abierto* $\mathbb{C}$*. Decimos que una función* $f : U \to A$ *es analítica en* u*, si para todo* $z_0 \in U$*, el siguiente límite existe en* A*:*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Definición 6.4. *(Cálculo funcional de Riesz o cálculo funcional holomorfo)*

Dado un elemento a *(arbitrario), en una álgebra de Banach y una función holomorfa en una vecindad de* $\sigma(a)$*, por* $f(a)$ *denotamos al elemento*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} f(z)(z - a)^{-1} dz$$

donde γ *es una curva cerrada simple, suave a trozos, cuyo interior contiene a* $\sigma(a)$*.*

Es más, la función $f \mapsto f(a)$ *es un homomorfismo de álgebras (ver Teorema 3.3.5 en* [8]*).*

Definición 6.5. *Una álgebra* C^* *es una álgebra de Banach,* $(A, \|\cdot\|)$*, dotada de una involución* $* : A \to A$ *que satisface*

1. $a^{**} = a$*, para* $a \in A$*;*
2. $(\lambda a + b)^* = \overline{z} a^* + b^*$*, para* $a, b \in A$*,* $z \in \mathbb{C}$*;*
3. $(ab)^* = b^* a^*$*, para* $a.b \in A$*;*
4. $\|a^* a\| = \|a\|^2$*, para* $a \in A$*.*

Definición 6.6. *Dada una álgebra* $C*$ *con uno,* $(A, \|\cdot\|, *)$ *decimos que*

1. $h \in A$ *es auto-adjunto si* $h^* = h$*;*
2. $a \in A$ *es positivo si existe* $s \in A$ *tal que* $a = s^* s$*;*
3. $x \in A$ *es normal si* $xx^* = x^* x$*;*
4. $u \in A$ *es unitario si* $uu^* = u^* u = 1$*.*

Referencias

[1] L.G. Brown, *Lidskii's Theorem in the Type II Case*, Geometric methods in operator algebras, Pitman Res. notes in Math. Ser 123, Longman Sci. Tech. (1986), 1-35.

[2] K.R. Davidson, *C^* algebras by example*, American Mathematical Society, 1996.

[3] R.G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Springer, 1998.

[4] H. Schultz U.Haagerup, *Brown measure of unbounded operators affiliated with a finite von Neumann algebra*, Math. Sacand. 100 **100** (2007), 209-263.

[5] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.

[6] W.K. Heyman Kennedy, *Subharmonic Functions, vol. 1*, Academic Press, 1976.

[7] D. Dunford Schwartz J.T., *Linear Operators. Part II: Spectral Theory*, Interscience Publishers, 1967.
[8] R. Kadison Ringrose, *Fundamentals of the Thoery of Operator Algebras. Vol. I*, Academic Press, 1983.
[9] D.L. Cohn, *Measure Thoery*, Birkhäuser, 1980.