

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Un Truco de Linearización

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
Niels Hansen Wacher Casas

Dr. Francisco Javier Torres Ayala
Facultad de Ciencias, UNAM

Ciudad de México, Noviembre 2022

Índice

1. Introducción **1**

2. Preliminares **2**
2.1. Operadores de clase traza 2
2.2. Espacios Duales 10
2.3. El Teorema de Stinespring 14
2.4. El Teorema de Extensión de Arveson 15

3. El truco de linearización desde el punto de álgebras C* **19**

4. El truco de linealización, un enfoque algebraico **26**

1. Introducción

En el contexto de las álgebras C* separables el funtor Ext de un álgebra $\mathfrak{A}$ se caracteriza como el conjunto de clases de equivalencia de homomorfismos-* uno a uno $\pi : \mathfrak{A} \to \mathscr{C}(\mathscr{H})$, donde $\mathscr{H}$ es el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ y $\mathscr{C}(\mathscr{H}) = {}^{\mathscr{B}(\mathscr{H})}\!/_{\mathscr{K}(\mathscr{H})}$ es su álgebra de Calkin. La relación de equivalencia que define a estas clases está dada por

$$\pi_1 \sim \pi_2 \iff \exists u \in \mathscr{U}(\mathscr{B}(\mathscr{H}))\forall a \in \mathfrak{A} : \pi_2(a) = \rho(u)\pi_1(a)\rho(u)^*,$$

con $\mathscr{U}(\mathscr{B}(\mathscr{H}))$ el grupo de operadores unitarios de $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ y $\rho : \mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathscr{C}(\mathscr{H})$ la función cociente. Para espacios de dimensión infinita se tiene que $\mathscr{H} \simeq \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ por lo que en esta clase de álgebras se puede dotar de estructura de semigrupo a $\mathrm{Ext}(\mathfrak{A})$ por medio de la operación $(\pi_1, \pi_2) \mapsto \pi_1 \oplus \pi_2$. Debido a que el funtor es un invariante resulta una herramienta importante en el estudio y clasificación de las álgebras C*. Choi y Efros demostraron que Ext es un grupo para toda álgebra unitaria, nuclear y separable [CE76] y Anderson dió el primer ejemplo de álgebra unitaria para la cual $\mathrm{Ext}(\mathfrak{A})$ no es un grupo [And78]; el hecho de que $\mathrm{Ext}(\mathrm{C}^*_{red}(F_k))$ fuera o no un grupo quedó como problema abierto. Pimsner y Voiculescu [PV82], Cuntz [Cun83], Lance [Lan83] y Connes [Con85] dieron respuesta negativa a dicho problema por medio de técnicas de la K-Teoría y la geometría no conmutativa, sin embargo fué hasta 2005 cuando Haagerup y Thorbjørnsen [HT05] dieron una prueba que dependía únicamente de la teoría de álgebras C* y las matrices aleatorias, y en 2006 en colaboración con Schultz [HST06] se redujo el uso de los teoremas sobre álgebras C* a herramientas del álgebra lineal.

Una de las técnicas relevantes en estos dos últimos trabajos es el Truco de Linearización. En ambos casos se reduce un polinomio autoadjunto de grado mayor o igual que 2 a otro de grado 1 con el cual comparte espectro y se demuestra que si para cada $m \in \mathbb{N}$, cada $\varepsilon > 0$ y cada polinomio autoadjunto q en r variables no conmutativas con coeficientes en $M_m(\mathbb{C})$ y grado 1 se tiene que $\sigma(q(x_1,\ldots,x_r)) \supseteq \sigma(q(y_1,\ldots,y_r))$ para elementos autoadjuntos en dos álgebras $x_1,\ldots,x_r \in \mathfrak{A}$ y $y_1,\ldots,y_r \in \mathfrak{B}$ entonces existe un homomorfismo-* suprayectivo $\varphi : \mathrm{C}^*(1,x_1,\ldots,x_r) \to \mathrm{C}^*(1,y_1,\ldots,y_r)$ tal que $\varphi(x_i) = y_i$. Este resultado ultimadamente permite demostrar que si $x_1,\ldots,x_r$ es un sistema semicircular en un espacio de probabilidad C*, $(\mathfrak{A},\tau)$, y $X_1^{(n)},\ldots,X_r^{(n)}$ son matrices de $n \times n$ que

forman un Ensamble Unitario Gaussiano normalizado, entonces para cada polinomio p en r variables no conmutativas se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| p(X_1^{(n)},\ldots,X_r^{(n)}) \right\| = \|p(x_1,\ldots,x_r)\|,$$

casi seguramente.

2. Preliminares

Para poder demostrar el Truco de Linearización desde el punto de vista de las álgebras C* primero es necesario desarrollar algunos de los elementos de esta teoría. Para hablar de operadores de clase traza y espacios duales se seguirá la misma trayectoria que en las notas de Hawthorne, [Haw15], y para obtener los teoremas de Arveson y de Stinspring se utilizarán los textos de Brown y Ozawa, [BO12], y de Paulsen, [Pau03].

Teorema 2.1. *Sea $\mathscr{K}(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{B}(\mathscr{H})$ el conjunto de operadores compactos en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$. Entonces $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ es un ideal bilateral cerrado.*

Demostración. En primer lugar es un subespacio lineal porque si U y V son conjuntos precompactos, entonces $U+V$ y λU también lo son para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sean $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $T \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ y B_1 la bola unitaria. Como A es un operador acotado entonces AB_1 es un conjunto acotado y por lo tanto TAB_1 es precompacto, es decir, $TA \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$. Por otro lado, $\overline{TB_1}$ es compacto, por continuidad de A también $A(\overline{TB_1})$ es compacto y como $ATB_1 \subseteq A\overline{TB_1}$ entonces $\overline{ATB_1} \subseteq A\overline{TB_1}$ y $AT \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$.

Para probar que $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ es cerrado consideremos una sucesión $(T_n)_n$ de operadores compactos que converja en norma a un operador acotado T. Se demostrará que TB_1 es precompacto.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq N$. Como T_n es compacto, entonces T_nB_1 es precompacto y por lo tanto existen $y_1,\ldots,y_k \in T_nB_1$ tales que $T_nB_1 \subseteq \cup_{i=1}^k B_{\varepsilon/2}(y_i)$. Veremos que $TB_1 \subseteq \cup_{i=1}^k B_\varepsilon(y_i)$.

Sea $y \in TB_1$, entonces existe $x \in B_1$ tal que $Tx = y$, así $\|Tx - T_nx\| < \varepsilon/2$. Sea y_j tal que $\|T_nx - y_j\| < \varepsilon/2$, entonces $\|Tx - y_j\| \leq \|Tx - T_nx\| + \|T_nx - y_j\| < \varepsilon$ y $y \in \cup_{i=1}^k B_\varepsilon(y_i)$.

Se concluye que TB_1 es precompacto y $T \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$. □

Los siguientes operadores serán de importancia en el desarrollo del trabajo, pues son precisamente los operadores acotados de rango 1.

Definición 2.2. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $f,g \in \mathscr{H}$. Definimos el operador $f \otimes g^*$, también denotado como $f \otimes g$ como

$$(f \otimes g^*)(x) = \langle x,g\rangle f, x \in \mathscr{H}.$$

Claramente $f \otimes g^*$ es acotado y de rango finito.

2.1. Operadores de clase traza

Definición 2.3. Diremos que $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ es de clase traza si

$$\sum_{e\in E} \langle |T|\, e, e\rangle < \infty,$$

para alguna base ortonormal E de $\mathscr{H}$. Los denotaremos por $TC(\mathscr{H})$, o bien TC.

Teorema 2.4. *Sea $T \in TC$, entonces*

$$\sum_{e\in E} \langle |T|\, e,e\rangle = \sum_{f\in F} \langle |T|\, f,f\rangle < \infty,$$

para toda base ortonormal E y F de $\mathscr{H}$.

Demostración. Sean E una base ortonormal para la cual $\sum_{e\in E} \langle |T|\, e,e\rangle < \infty$ y F una base ortonormal arbitraria, entonces utilizando la identidad de Parseval y el hecho de que $|T|^{1/2}$ es un elemento autoadjunto se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in E} \langle |T|\, e,e\rangle &= \sum_{e\in E} \left\| |T|^{1/2} e \right\|^2, \\
&= \sum_{e\in E}\sum_{f\in F} \left| \left\langle |T|^{1/2} e, f \right\rangle \right|^2, \\
&= \sum_{f\in F}\sum_{e\in E} \left| \left\langle e, |T|^{1/2} f \right\rangle \right|^2, \\
&= \sum_{f\in F} \left\| |T|^{1/2} f \right\|^2, \\
&= \sum_{f\in F} \langle |T|\, f,f\rangle,
\end{aligned}$$

de donde se concluye lo deseado. □

El teorema anterior nos permite hacer la siguiente definición.

Definición 2.5. Sea $T \in TC$. Definimos

$$\|T\|_1 = \sum_{e\in E} \langle |T|\, e,e\rangle,$$

donde E es una base ortonormal de $\mathscr{H}$.

Deseamos demostrar que la expresión $\sum_{e\in E} \langle Te,e\rangle$ es independiente de la base ortonormal E que se tome, para ello demostraremos la siguiente cadena de lemas.

Lema 2.6. *Sea $T \in TC$ y $\varepsilon > 0$. Se afirma que no existe un conjunto ortonormal infinito de vectores $g \in \mathscr{H}$ tales que $\left\| |T|^{1/2} g \right\| \geq \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos que existe dicho conjunto y denotémoslo por E_0, es decir $\left\| |T|^{1/2} e \right\| \geq \varepsilon$ para cada $e \in E_0$. Podemos extender E_0 a una base ortonormal E para $\mathscr{H}$, así

$$\|T\|_1 = \sum_{e\in E} \langle |T|\, e,e\rangle = \sum_{e\in E} \left\langle |T|^{1/2} e, |T|^{1/2} e \right\rangle = \sum_{e\in E} \left\| |T|^{1/2} e \right\|^2 \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon^2 = \infty,$$

lo cual es una contradicción. □

Definición 2.7. Se denotará por $\mathscr{B}_{00}(\mathscr{H})$ al conjunto de operadores acotados de rango finito sobre $\mathscr{H}$.

Con el lema anterior podemos demostrar el siguiente resultado.

Lema 2.8. *Sea $T \in TC$, entonces $|T|^{1/2} \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$.*

Demostración. Sea E_0 un conjunto ortonormal finito y maximal tal que si g es unitario y $\left\||T|^{1/2} g\right\| \geq \varepsilon$ entonces $g \in spanE_0$. Definimos el operador de rango finito F como

$$Fe = \begin{cases} |T|^{1/2} e & \text{si } e \in E_0, \\ 0 & \text{si } e \in E \setminus E_0. \end{cases}$$

Dado que $spanE_0$ es de dimensión finita es cerrado en $\mathscr{H}$, por lo que $\mathscr{H} = spanE_0 \oplus spanE_0{}^{\perp}$. Al tomar $g+h \in spanE_0 \oplus spanE_0{}^{\perp}$ tal que $\|g+h\| = 1$ se tiene que $\|h\| \leq 1$ y

$$\left(|T|^{1/2} - F\right)(g+h) = \left(|T|^{1/2} - F\right) g + \left(|T|^{1/2} - F\right) h = |T|^{1/2} h,$$

como $\left\||T|^{1/2} \frac{h}{\|h\|}\right\| < \varepsilon$ entonces $\left\||T|^{1/2} - F\right\| < \varepsilon$. Así $|T|^{1/2} \in \overline{\mathscr{B}_{00}(\mathscr{H})} = \mathscr{K}(\mathscr{H})$. □

Corolario 2.8.1. *Si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces*

$$TC(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{K}(\mathscr{H}).$$

Demostración. Sea $T \in TC$ y $T = W|T|$ su descomposición polar, entonces $T = (W|T|^{1/2})|T|^{1/2}$ y como $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ es ideal bilateral entonces $T \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$. Note que en particular se tiene que $|T| \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$. □

Lema 2.9. *Sea $T \in TC$ y $T = W|T|$ su descomposición polar. Por el Teorema Espectral para operadores autoadjuntos y compactos [Con97, Teorema 5.1] existe una base ortonormal E que diagonaliza a $|T|$, es decir, existen $s_e \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que $|T|e = s_e e$ para cada $e \in E$. En consecuencia $\|T\|_1 = \sum_{e \in E} s_e$ y $\sigma(|T|) = \{s_e\}_{e \in E}$.*

Con lo anterior ya demostrado podemos concluir el problema propuesto.

Teorema 2.10. *Sea $T \in TC$. Entonces*

$$\sum_{e \in E} \langle Te, e \rangle$$

es finito e independiente de la elección de la base ortonormal E.

Demostración. Sea $T \in TC$ y $T = W|T|$ su descomposición polar y E una base ortonormal que diagonaliza a $|T|$ con $s_e \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que $|T|e = s_e e$ para cada $e \in E$. Sea F una base ortonormal

arbitraria para $\mathscr{H}$, entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in E} |\langle Te,e\rangle| &= \sum_{e\in E} |\langle W|T|e,e\rangle|, \\
&= \sum_{e\in E} |\langle Ws_e e,e\rangle|, \\
&= \sum_{e\in E} s_e |\langle We,e\rangle|, \\
&\leq \sum_{e\in E} s_e \|We\| \|e\|, \\
&\leq \sum_{e\in E} s_e, \\
&= \|T\|_1 < \infty,
\end{aligned}$$

ya que los vectores $e \in E$ son unitarios y W es la isometría parcial asociada a la descomposición polar de T.

Por lo tanto $\sum_{e\in E} \langle Te,e\rangle = \sum_{e\in E} s_e \langle We,e\rangle$ converge absolutamente y los términos se pueden reacomodar. Con esta aclaración se puede hacer lo siguiente

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in E} \langle Te,e\rangle &= \sum_{e\in E} s_e \langle We,e\rangle, \\
&= \sum_{e\in E} s_e \left\langle We, \sum_{f\in F} \langle e,f\rangle f \right\rangle, \\
&= \sum_{e\in E} s_e \sum_{f\in F} \langle We, \langle e,f\rangle f\rangle, \\
&= \sum_{e\in E} \sum_{f\in F} s_e \overline{\langle e,f\rangle} \langle We,f\rangle, \\
&= \sum_{e\in E} \sum_{f\in F} s_e \langle f,e\rangle \langle We,f\rangle, \\
&= \sum_{f\in F} \sum_{e\in E} \langle f,e\rangle \langle W|T|e,f\rangle, \\
&= \sum_{f\in F} \sum_{e\in E} \langle W|T|\langle f,e\rangle e,f\rangle, \\
&= \sum_{f\in F} \left\langle W|T|(\sum_{e\in E} \langle f,e\rangle e), f \right\rangle, \\
&= \sum_{f\in F} \langle W|T|f,f\rangle, \\
&= \sum_{f\in F} \langle Tf,f\rangle.
\end{aligned}$$

□

Definición 2.11. Sea $T \in TC$. Definimos la traza de T como

$$tr(T) = \sum_{e\in E} \langle Te,e\rangle,$$

para alguna base ortonormal E.

Observación 2.12. *Es claro que los operadores de rango finito, $\mathscr{B}_{00}(\mathscr{H})$, son todos de clase traza.*

Lema 2.13. *Sea $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Si $T = W|T|$ es su descomposición polar con $\ker W = \ker|T|$ entonces*

- $W^*W|T| = |T|$,
- $W^*T = |T|$.
- $W|T|W^* = |T^*|$.

Demostración. Recordemos que W^*W es la proyección sobre el subespacio cerrado $(\ker W)^\perp$ y que $(\ker W)^\perp = (\ker|T|)^\perp = \overline{\operatorname{ran}|T|}$. Entonces $W^*W|T| = |T|$. Para obtener la segunda desigualdad basta reemplazar T por su descomposición polar $W|T|$ y aplicar el primer resultado. Asimismo $(T^*)^*T^* = TT^* = W|T||T|W^* = (W|T|W^*)(W|T|W^*) = (W|T|W^*)^2$. Además, $W|T|W^* = W|T|^{1/2}|T|^{1/2}W^* = (|T|^{1/2}W)^*(|T|^{1/2}W) \geq 0$. Por unicidad de la raíz cuadrada $W|T|W^* = |T^*|$. □

Proposición 2.14. *Sea $T \in TC$. Entonces $\|T^*\|_1 = \|T\|_1$, así $T^* \in TC$.*

Demostración. Sea $T \in TC$ y $T = W|T|$ su descomposición polar con $\ker|T| = \ker W$. Sea E_0 una base ortonormal para $\ker(W^*)$ y E una base ortonormal para $\mathscr{H}$ que extienda a E_0. Definimos $F_0 = \{W^*e : e \in E \setminus E_0\}$. W^* es una isometría parcial porque W lo es, de modo que F_0 es un conjunto ortonormal. Sea F una base ortonormal para $\mathscr{H}$ que extienda a F_0, entonces al aplicar 2.13

$$\begin{aligned}
\|T^*\|_1 &= \sum_{e\in E} \langle |T^*|e, e\rangle, \\
&= \sum_{e\in E} \langle W|T|W^*e, e\rangle, \\
&= \sum_{e\in E} \langle |T|W^*e, W^*e\rangle, \\
&= \sum_{f\in F_0} \langle |T|f, f\rangle, \\
&\leq \sum_{f\in F} \langle |T|f, f\rangle, \\
&= \|T\|_1.
\end{aligned}$$

Por medio de un proceso análogo se demuestra que $\|T\|_1 = \|T^{**}\|_1 \leq \|T^*\|_1$ y por lo tanto se da la igualdad. □

Lema 2.15. *Sea $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ y $T \in TC$. Sea E una base ortonormal para $\mathscr{H}$ que diagonaliza a $|T|$, es decir, suponga que existen $s_e \geq 0$ tales que $|T|e = s_e e$ para toda $e \in E$. Entonces*

$$\sum_{e\in E} |\langle ATe, e\rangle| \leq \|A\| \, \|T\|_1.$$

Demostración. Sea $T = W|T|$ la descomposición polar de T, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in E} |\langle ATe, e\rangle| &= \sum_{e\in E} |\langle AW|T|e, e\rangle|, \\
&= \sum_{e\in E} s_e |\langle AWe, e\rangle|, \\
&\leq \sum_{e\in E} s_e \|AWe\| \|e\|, \\
&= \sum_{e\in E} s_e \|AWe\|, \\
&\leq \sum_{e\in E} s_e \|A\| \|We\|, \\
&\leq \sum_{e\in E} s_e \|A\|, \\
&= \|A\| \sum_{e\in E} s_e, \\
&= \|A\| \|T\|_1.
\end{aligned}$$

□

Definición 2.16. Sea $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Diremos que T es un operador de Hilbert-Schmidt is $|T|^2 \in TC$. y lo denotamos por $B_2(\mathscr{H})$. Asimismo definimos,

$$\|T\|_2 = \{\sum_{e\in E} \left\langle |T|^2 e, e\right\rangle\}^{1/2} = \left\| |T|^2 \right\|_1^{1/2}$$

Teorema 2.17. *TC es subespacio de $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ y $\|.\|_1$ es una norma sobre éste.*

Demostración. Sea $T \in TC$ y E una base ortonormal para $\mathscr{H}$ que diagonaliza a $|T|$. Claramente $\|T_1\| = \sum_{e\in E} \langle |T|e, e\rangle \geq 0$. Si $T = 0$ entonces $|T| = 0$ y $\|T\|_1 = 0$. Por otro lado, si $\|T\|_1 = 0$ entonces $0 = \sum_{e\in E} \langle |T|e, e\rangle = \sum_{e\in E} s_e$, y como $s_e \geq 0$ para cada $e \in E$ entonces $s_e = 0$ para toda e y $0 = |T| = T$.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $(\lambda T)^*(\lambda T) = |\lambda|^2 T^*T$ y $|\lambda T| = |\lambda||T|$. Se sigue que $\|\lambda T\|_1 = \sum_{e\in E} \langle |\lambda||T|e, e\rangle = |\lambda| \|T\|_1$.

Sean $S, T \in TC$ y $S = W|S|$, $T = V|T|$ y $S+T = U|S+T|$ las descomposiciones polares de estos elementos. Como $|S+T|$ es positivo y compacto, entonces por el Teorema Espectral existe una sucesión de vectores ortonormales $\{e_n\}_n$ contenidos en una base ortonormal E tal que

$|S+T| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n (e_n \otimes e_n^*)$, con $\gamma_n \geq 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\infty > & \left\| |S+T| \right\|_1 , \\
= & \sum \langle |S+T| e_n, e_n \rangle , \\
= & \sum \langle (S+T) e_n, U^* e_n \rangle , \\
= & \sum \{ \langle S e_n, U^* e_n \rangle + \langle T e_n, U^* e_n \rangle \}, \\
= & \sum \{ \langle |S| e_n, W^* U^* e_n \rangle + \langle |T| e_n, V^* U^* e_n \rangle \}, \\
= & \sum \{ \left\langle |S|^{1/2} e_n, |S|^{1/2} W^* U^* e_n \right\rangle + \left\langle |T|^{1/2} e_n, |T|^{1/2} V^* U^* e_n \right\rangle \}, \\
\leq & \sum \{ \left\| |S|^{1/2} e_n \right\| \left\| |S|^{1/2} W^* U^* e_n \right\| + \left\| |T|^{1/2} e_n \right\| \left\| |T|^{1/2} V^* U^* e_n \right\| \}, \\
\leq & \{ \sum \left\| |S|^{1/2} e_n \right\|^2 \}^{1/2} \{ \sum \left\| |S|^{1/2} W^* U^* e_n \right\|^2 \}^{1/2} + \{ \sum \left\| |T|^{1/2} e_n \right\|^2 \}^{1/2} \{ \sum \left\| |T|^{1/2} V^* U^* e_n \right\|^2 \}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Notemos que $\{\sum \left\| |S|^{1/2} e_n \right\|^2\}^{1/2} = \|S\|_1^{1/2}$ y se tiene un resultado análogo para el caso de T. Se tiene la descomposición polar $S = W|S|$ y como se observó en 2.14 $S^* = W|S|W^*$. Como $\{e_n\}_n$ diagonaliza a $|S+T|$ y $S+T = U|S+T|$ entonces salvo por aquellos n para los cuales $U^* e_n = 0$, el conjunto $\{U^* e_n\}$ es ortonormal. Al denotar $f_n = U^* e_n$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
\left\| |S|^{1/2} W^* U^* e_n \right\|^2 &= \left\langle |S|^{1/2} W^* U^* e_n, |S|^{1/2} W^* U^* e_n \right\rangle , \\
&= \langle |S| W^* U^* e_n, W^* U^* e_n \rangle , \\
&= \langle W|S| W^* U^* e_n, U^* e_n \rangle , \\
&= \langle |S^*| U^* e_n, U^* e_n \rangle , \\
&\leq \langle |S^*| f_n, f_n \rangle .
\end{aligned}
$$

Usando ésto obtenemos que $\{\sum \left\| |S|^{1/2} W^* U^* e_n \right\|^2\}^{1/2} \leq \left\| |S^*|^{1/2} \right\|_2 = \| |S^*| \|_1^{1/2} = \|S\|_1^{1/2}$ y al aplicarlo sobre lo obtenido en (1) se concluye que $\|S+T\|_1 \leq \|S\|_1 + \|T\|_1$. □

Observación 2.18. *La función $tr : TC \to \mathbb{C}$ es lineal ésto es inmediato de la linealidad del producto interior en su primer argumento.*

Proposición 2.19. *Si T es de clase traza entonces $\|AT\|_1 \leq \|A\| \|T\|_1$ para cada $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.*

Demostración. Sea $AT = V|AT|$ la descomposición polar de AT, como $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ es un ideal bilateral entonces AT es compacto, por lo tanto $|T| = W^* T \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$. Como $|T| \geq 0$, entonces por el Teorema Espectral para Operadores Compactos existe una base ortonormal E de $\mathscr{H}$ que

diagonaliza a $|AT|$. Entonces por 2.15 se tiene que

$$\begin{aligned}\|AT\|_1 &= \sum_{e\in E} \langle |AT|\, e, e\rangle\,,\\ &= \sum_{e\in E} |\langle |AT|\, e, e\rangle|\,,\\ &= \sum_{e\in E} |\langle V^*ATe, e\rangle|\,,\\ &\leq \|V^*A\|\,\|T\|_1\,,\\ &\leq \|A\|\,\|T\|_1\,.\end{aligned}$$

□

Proposición 2.20. *Si $T \in TC$ entonces $\|TA\|_1 \leq \|A\|\,\|T\|_1$ para cada $A \in \mathscr{B}\mathscr{H}$.*

Demostración. Este resultado se deduce de que $\|T^*\|_1 = \|T\|_1$ y de la afirmación anterior,

$$\|TA\|_1 = \|(A^*T^*)^*\|_1 = \|A^*T^*\|_1 \leq \|A^*\|\,\|T^*\|_1 = \|A\|\,\|T\|_1\,.$$

□

Teorema 2.21. *$\mathscr{B}_{00}(\mathscr{H})$ es denso en TC respecto a $\|.\|_1$.*

Demostración. Sea $T \in TC$, así $|T| \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ y $|T| \geq 0$. Sea E una base ortonormal para $\mathscr{H}$ que diagonalice al operator $|T|$ y $s_e = |T|\, e \geq 0$ para cada $e \in E$. Sea $\varepsilon > 0$, como $T \in TC$ existe $E_0 \subseteq E$ finito tal que $\sum_{e\in E_0} s_e = \sum_{e\in E_0} \langle |T|\, e, e\rangle > \|T\|_1 - \varepsilon$. En particular, $\sum_{e\notin E_0} s_e < \varepsilon$.

Se define $F \in \mathscr{B}_{00}(\mathscr{H})$ de la siguiente manera

$$Fe = \begin{cases} |T|\, e & \text{si } e \in E_0,\\ 0 & \text{si } e \in E\setminus E_0.\end{cases}$$

Así $|T| - F = \sum_{e\in E\setminus E_0} s_e e\otimes e^* \geq 0$, de manera que $||T| - F| = |T| - F$ y

$$\begin{aligned}\||T| - F\|_1 &= \sum_{e\in E} \langle ||T| - F|\, e, e\rangle\,,\\ &= \sum_{e\in E} \langle (|T| - F)e, e\rangle\,,\\ &= \sum_{e\in E\setminus E_0} \langle |T|\, e, e, ,\rangle\\ &= \sum_{e\in E\setminus E_0} s_e < \varepsilon.\end{aligned}$$

Si $T = W|T|$ es la descomposición polar de T entonces claramente $WF \in \mathscr{B}_{00}(\mathscr{H})$ y

$$\|T - WF\|_1 = \|W|T| - WF\|_1 \leq \|W\|\,\||T| - F\|_1 < \|W\|\,\varepsilon \leq \varepsilon.$$

□

Teorema 2.22. *Sea $T \in TC$ y $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Entonces $|tr(AT)| \leq \|T\|_1\,\|A\|$.*

Demostración. Sea E una base ortonormal que diagonaliza a $|T|$, entonces

$$\begin{aligned} |tr(AT)| &= \left| \sum_{e\in E} \langle ATe, e\rangle \right|, \\ &\leq \sum_{e\in E} |\langle ATe, e\rangle|, \\ &\leq \|A\| \, \|T\|_1 . \end{aligned}$$

□

Observación 2.23. *Note que si $T \in TC$, entonces $tr(T) = \overline{tr(T^*)}$.*

Demostración.

$$tr(T) = \sum_{e\in E} \langle Te, e\rangle = \sum_{e\in E} \langle e, T^*e\rangle = \sum_{e\in E} \overline{\langle T^*e, e\rangle} = \overline{tr(T^*)}.$$

□

Corolario 2.23.1. *Sea $T \in TC$ y $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Entonces $|tr(TA)| \leq \|T\|_1 \|A\|$.*

Demostración.

$$|tr(TA)| = \left|\overline{tr((A^*T^*)^*)}\right| = |tr(A^*T^*)| \leq \|T^*\|_1 \|A^*\| = \|T\|_1 \|A\| .$$

□

2.2. Espacios Duales

Lema 2.24. *Sean $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ y $g, h \in \mathscr{H}$. Entonces $tr(A(g \otimes h^*)) = \langle Ag, h\rangle$.*

Demostración. Empecemos por notar que $g \otimes h^* = \langle , h\rangle g \in \mathscr{B}_{00}(\mathscr{H}) \subseteq TC$ y por lo tanto la traza está bien definida.

Caso 1 Supongamos que $h = 0$, entonces $g \otimes h^* = 0$, $tr(A(g \otimes h^*)) = 0$ y $\langle Ag, h, =\rangle 0$.

Caso 2 Supongamos que $h \neq 0$. Sea E una base ortonormal que extienda a $\{\frac{h}{\|h\|}\}$. Entonces

$$\begin{aligned} tr(A(g \otimes h^*)) &= \sum_{e\in E} \langle A(g \otimes h^*)e, e\rangle , \\ &= \sum_{e\in E} \langle A \langle e, h\rangle g, e\rangle , \\ &= \sum_{e\in E} \langle e, h\rangle \langle Ag, e\rangle , \\ &= \left\langle \frac{h}{\|h\|}, h \right\rangle \left\langle Ag, \frac{h}{\|h\|} \right\rangle , \\ &= \frac{\|h\|^2}{\|h\|^2} \langle Ag, h\rangle , \\ &= \langle Ag, h\rangle . \end{aligned}$$

□

Lema 2.25. *Definamos* $\Psi : TC \to \mathscr{K}(\mathscr{H})^*$ *como* $\Psi(T) = \Psi_T$*, con* $\Psi_T(K) = tr(TK)$*. Entonces* Ψ_T *y* Ψ *son lineales.*

Demostración. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $S,T \in TC$ y $K,L \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$, entonces

$$\begin{aligned}
\Psi_T(\lambda K+L) =& tr(T(\lambda K+L)),\\
=& tr(\lambda TK+TL),\\
=& \lambda tr(TK)+tr(TL),\\
=& \lambda\Psi_T(K)+\Psi_T(L).\\
\Psi_{\lambda S+T}(K) =& tr((\lambda S+T)K),\\
=& \lambda tr(SK)+tr(TK),\\
=& \lambda\Psi_S(K)+\Psi_T(K).
\end{aligned}$$

□

Lema 2.26. $\|\Psi_T\| \leq \|T\|_1$ *para toda* $T \in TC$*.*

Demostración. Para cada $K \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$

$$|\Psi_T(K)| = |tr(TK)| \leq \|T\|_1 \|K\|.$$

□

Con ello se verifica que $\Psi : TC \to \mathscr{K}(\mathscr{H})^*$ es lineal y acotada.

Lema 2.27. Ψ *es biyectiva y* $\|\Psi_T\| \geq \|T\|_1$.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathscr{K}(\mathscr{H})^*$. Definimos una forma sesquilineal en $\mathscr{H}$ dada por $[g,h] = \alpha(g \otimes h^*)$. Entonces para $g,g_1,g_2,h,h_1,h_2 \in \mathscr{H}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
[g_1+g_2,h] =& \alpha((g_1+g_2)\otimes h^*),\\
=& \alpha(g_1\otimes h^*+g_2\otimes h^*),\\
=& [g_1,h]+[g_2,h].\\
[g,h_1+h_2] =& \alpha(g\otimes(h_1+h_2)^*),\\
=& \alpha(g\otimes {h^*}_1+g\otimes {h^*}_2),\\
=& [g,h_1]+[g,h_2].\\
[\lambda g,h] =& \alpha(\lambda g\otimes h^*),\\
=& \lambda\alpha(g\otimes h^*),\\
=& \lambda[g,h].\\
[g,\lambda h] =& \alpha(g\otimes(\lambda h)^*),\\
=& \overline{\lambda}\alpha(g\otimes h^*),\\
=& \overline{\lambda}[g,h].
\end{aligned}$$

Finalmente

$$|[g,h]| = |\alpha(g \otimes h^*)| \leq \|\alpha\| \, \|g \otimes h^*\| = \|\alpha\| \, \|g\| \, \|h\|,$$

por lo que $[.,.]$ es acotada. Por el Teorema de Representación de Riesz, si $[.,.]$ es una forma sesquilineal acotada en $\mathscr{H}$ entonces existe un único operador $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ tal que $[g,h] = \langle Sg,h\rangle = tr(S(g \otimes h^*))$ para cada $g,h \in \mathscr{H}$.

La unicidad de S implica que Ψ es inyectiva. En efecto, si $T_1, T_2 \in TC$ satisfacen que $\Psi_{T_1} = \Psi_{T_2} = \alpha$ entonces

$$tr(T_1(g \otimes h^*)) = \langle T_1 g,h\rangle = [g,h] = \langle T_2 g,h\rangle = tr(T_2(g \otimes h^*)),$$

y por lo tanto $T_1 = T_2$, para ello basta recordar que $\mathscr{B}_{00}(\mathscr{H})$ es denso en $\mathscr{K}(\mathscr{H})$.

Sea $S = W|S|$ la descomposición polar de S. Sea E una base ortonormal para $\mathscr{H}$ y $E_0 \subseteq E$ finito. Empecemos por notar que $(e \otimes e^*)W^* = e \otimes (We)^*$, para cada $x \in \mathscr{H}$

$$\begin{aligned}(e \otimes e^*)W^*x &= \langle W^*x, e\rangle \, e, \\ &= \langle x, We\rangle \, e, \\ &= e \otimes We^*(x).\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E_0} \langle |S|\, e,e\rangle &= \left| \sum_{e\in E_0} \langle W^*Se,e\rangle \right|, \\ &= \left| \sum_{e\in E_0} \langle Se,We\rangle \right|, \\ &= \left| \sum_{e\in E_0} [e,We] \right|, \\ &= \left| \sum_{e\in E_0} \alpha(e \otimes (We)^*) \right|, \\ &= \left| \alpha\Big(\sum_{e\in E_0} (e \otimes (We)^*)\Big) \right|, \\ &= \left| \alpha\Big(\sum_{e\in E_0} (e \otimes e^*)W^*\Big) \right|, \\ &\leq \|\alpha\| \left\| \sum_{e\in E_0} e \otimes e^* \right\| \|W\|,\end{aligned}$$

y como $\sum_{e\in E_0} e \otimes e^*$ es una proyección de rango finito y W es una isometría parcial, entonces se tiene que $\sum_{e\in E_0} \langle |S|\, e,e\rangle \leq \|\alpha\|$.

Por lo tanto $\|S\|_1 = \sum_{e\in E} \langle |S|\, e,e\rangle \leq \|\alpha\| < \infty$ y $S \in TC$.

Se tiene que $\Psi_S(g \otimes h^*) = [g,h] = \alpha(g \otimes h^*)$ para cada $g,h \in \mathscr{H}$, $\mathscr{B}_{00}(\mathscr{H})$ es generado por elementos de la formam $g \otimes h^*$ y $\mathscr{B}_{00}(\mathscr{H})$ es denso en $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ respecto a $\|.\|$, más aún, Ψ_S y α son funcionales lineales $\|\|-$*continuas* y coinciden en elementos de la forma $g \otimes h^*$. Por lo tanto coinciden $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ y $\Psi_s = \alpha$, con ello se concluye que Ψ es suprayectiva. □

Teorema 2.28. *El dual de $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ es isométricamente isomorfo a $(TC, \|.\|_1)$ y Ψ es isomorfismo.*

Demostración. En el resultado anterior se denotaba por S al único operador que satisface $\Psi_s = \alpha$. De esta manera $\|S\|_1 \leq \|\alpha\| = \|\Psi_S\|$, es decir $\left\|\Psi^{-1}(\Psi_S)\right\| \leq \|\Psi\|$. Se deduce que $\|S\|_1 = \|\Psi_S\|$ y que Ψ es un isomorfismo isométrico. □

Corolario 2.28.1. *$(TC, \|.\|_1)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Anteriormente se demostró que $(TC, \|.\|_1)$ es un espacio normado. Como es isométricamente isomorfo a $\mathscr{K}(\mathscr{H})^*$ y $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ es completo respecto a $\|.\|$, entonces $\mathscr{K}(\mathscr{H})^*$ y TC también son completos. □

Lema 2.29. *Sea $\Phi : \mathscr{B}(\mathscr{H}) \to TC^*$ dado por $\Phi(A) = \Phi_A$ con $\Phi_A(T) = tr(AT)$. Entonces Φ_A y Φ son lineales.*

Demostración. La linealidad de ambas es consecuencia inmediata de la linealidad de la traza, se mostrará únicamente uno de los resultados pues el otro es análogo. Sean $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $T \in TC$ entonces

$$\begin{aligned}
\Phi(A+B)(T) =& \Phi_{A+B}(T) = tr((A+B)T) = tr(AT+BT) = tr(AT)+tr(BT), \\
=& \Phi(A)(T)+\Phi(B)(T), \\
\Phi(\lambda A)(T) =& \Phi_{\lambda A}(T) = tr(\lambda AT) = \lambda tr(AT) = \lambda\Phi(A)(T).
\end{aligned}$$

□

Lema 2.30. *Para cada $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ se tiene que $\|\Phi_A\| \leq \|A\|$.*

Demostración. Sea $T \in TC$, entonces por 2.19

$$\|\Phi_A(T)\| = |tr(AT)| \leq \|A\| \|T\|_1$$

□

Lema 2.31. *Para cada $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ se tiene que $\|\Phi_A\| \geq \|A\|$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, se demostrará que $\|\Phi_A\| > \|A\| - \varepsilon$. Sea $g \in \mathscr{H}, g \neq 0$ tal que $\|Ag\| > (\|A\| - \varepsilon)\|g\|$. Como $tr(A(g \otimes h^*)) = \langle Ag, h\rangle$ entonces

$$\begin{aligned}
\Phi_A(g \otimes (Ag)^*) =& tr(A(g \otimes (Ag)^*)), \\
=& \langle Ag, Ag\rangle, \\
=& \|Ag\|^2, \\
>& \|Ag\| (\|A\| - \varepsilon) \|g\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\Phi_A\| \geq \|A\|$. □

Lema 2.32. *Φ es suprayectiva.*

Demostración. Sea $\alpha \in TC$. Considere la forma sesquilineal y acotada dada por $[g,h] = \alpha(g \otimes h^*)$. De manera similar a como se hizo en 2.27 existe un único $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ tal que $[g,h] = \langle Ag, h\rangle = tr(A(g \otimes h^*)) = \Phi_A(g \otimes h^*)$. $\mathscr{B}_{00}(\mathscr{H})$ es generado por elementos de la forma $g \otimes h^*$ con $g, h \in \mathscr{H}$ y es denso respecto a $\|\|_1$ en TC. Como α, Φ_A son lineales, $\|\|_1$-continuas y coinciden en $\mathscr{B}_{00}(\mathscr{H})$ entonces coinciden en TC y por lo tanto $\alpha = \Phi_A = \Phi(A)$. □

Teorema 2.33. *El dual de $(TC, \|.\|_1)$ es isométricamente isomorfo a $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.*

2.3. El Teorema de Stinespring

Definición 2.34. Un sistema de operadores $\mathscr{E}$ es un subespsacio cerrado y autoadjunto de un álgebra C* $\mathfrak{A}$ tal que $1_{\mathfrak{A}} \in \mathscr{E}$.

Observación 2.35. *El hecho de que* $1 \in \mathscr{E}$ *garantiza que el sistema de operadores es generado por elementos positivos. Si* $x \in \mathscr{E}$ *entonces* $\Re(x) = \frac{1}{2}(x+x^*), \Im(x) = \frac{1}{2i}(x-x^*) \in \mathscr{E}$ *y son elementos autoadjuntos.m*

Asimismo, si $y \in \mathfrak{A}$ *es un elemento autoadjunto entonces*

$$y = \frac{1}{2}(\|y\| 1 + y) - \frac{1}{2}(\|y\| 1 - y),$$

que claramente es combinación de elementos positivos.

Definición 2.36. Sean $\mathfrak{B}$ un álgebra C*, $\mathscr{E}$ un sistema de operadores y $\varphi : \mathscr{E} \to \mathfrak{B}$ una función. Diremos que φ es un mapeo completamente positivo si $\varphi_n : M_n(\mathscr{E}) \to M_n(\mathfrak{B})$ dada por $\varphi_n([a_{ij}]) = [\varphi(a_{ij})]$ es positivo para cada $n \in \mathbb{N}$. A la función φ_n se le llama la n-ésima amplificación de φ y denotamos por $CP(\mathscr{E}, \mathfrak{B})$ al conjunto de mapeos completamente positivos.

Observación 2.37. *Si* φ_n *es la n-ésima amplificación de* φ*, entonces se puede escribir de la forma*

$$\varphi_n = 1_n \otimes \varphi.$$

Teorema 2.38 (Stinespring)**.** *Sea* $\mathfrak{A}$ *un álgebra* C* *unitaria y* $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *un mapeo completamente positivo. Entonces existe un espacio de Hilbert* $\tilde{\mathscr{H}}$*, una representación* $\pi : \mathfrak{A} \to \mathscr{B}(\tilde{\mathscr{H}})$ *y un operador* $V : \mathscr{H} \to \tilde{\mathscr{H}}$ *tal que para cada* $a \in \mathfrak{A}$

$$\varphi(a) = V^* \pi(a) V.$$

En particular, $\|\varphi(1)\| = \|V^*V\| = \|V\|^2$.

Demostración. Sea $\mathfrak{A} \odot \mathscr{H}$ el producto tensorial algebraico de $\mathfrak{A}$ con $\mathscr{H}$. Se define la siguiente función $[.,.]$ en $\mathfrak{A} \times \mathscr{H}$:

$$[\sum_j b_j \otimes \eta_j, \sum_i a_i \otimes \xi_i] = \sum_{i,j} \left\langle \varphi(a_i^* b_j)\eta_j, \xi_i \right\rangle.$$

Dicha función está bien definida por la propiedad universal del producto tensorial $\mathfrak{A} \odot \mathscr{H}$ e induce una forma sesquilineal. Adicionalmente es semidefinida positiva, para ello note que la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1^*a_1 & a_1^*a_2 & a_1^*a_3 & \dots & a_1^*a_n \\ a_2^*a_2 & a_2^*a_2 & a_2^*a_3 & \dots & a_2^*a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_n^*a_1 & a_n^*a_2 & a_n^*a_3 & \dots & a_n^*a_n \end{pmatrix}$$

es positiva, pues se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} a_1^* & 0 & \dots & 0 \\ a_2^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_n^* & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

y que

$$[\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \eta_1, \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \eta_1] = \langle \varphi(a_1^* a_1)\eta_1, \eta_1\rangle + \langle \varphi(a_1^* a_2)\eta_2, \eta_1\rangle + \ldots + \langle \varphi(a_n^* a_1)\eta_1, \eta_n\rangle \ldots \langle \varphi(a_n^* a_n)\eta_n, \eta_n\rangle,$$

$$= \left\langle \varphi^n \begin{pmatrix} a_1^*a_1 & a_1^*a_2 & a_1^*a_3 & \ldots & a_1^*a_n \\ a_2^*a_2 & a_2^*a_2 & a_2^*a_3 & \ldots & a_2^*a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_n^*a_1 & a_n^*a_2 & a_n^*a_3 & \ldots & a_n^*a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \right\rangle_{\oplus^n \mathscr{H}},$$

$$\geq 0$$

Al ser semidefinida positiva se puede hacer el cociente respecto al subespacio nulo para obtener un espacio pre-Hilbert y denotamos por $\tilde{\mathscr{H}}$ a su completación.

Se denotará por $(\sum a_i \otimes \xi_i)\tilde{}$ a la clase de equivalencia del elemento $\sum a_i \otimes \xi_i \in \mathfrak{A} \odot \mathscr{H}$. Sea $V : \mathscr{H} \to \tilde{\mathscr{H}}$ el operador dado por $V(\xi) = (1_{\mathfrak{A}} \otimes \xi)\tilde{}$ y definimos $\pi(a)$ sobre $(\mathfrak{A} \odot \mathscr{H})\tilde{}$ como $\pi(a)((\sum a_i \otimes \xi_i)\tilde{}) = (\sum a a_i \otimes \xi_i)$. Dado $\xi \in \mathscr{H}$ se tiene que $0 \leq \|V(\xi)\|^2 = [1 \otimes \xi, 1 \otimes \xi] = \langle \varphi(1)\xi, \xi\rangle \leq \|\varphi(1)\| \|\xi\|^2$, lo que asegura que V es acotado pues $\|V\|^2 \leq \|\varphi(1)\|$. Por otro lado, $\|V\|^2 = \sup\{\langle \varphi(1)\xi, \xi\rangle : \|\xi\| \leq 1\} = \|\varphi(1)\|$.

Se afirma que $V^*(a \otimes \xi)\tilde{} = \varphi(a)\xi$. En efecto

$$\begin{aligned} \langle V^*(a \otimes \xi)\tilde{}, \eta\rangle &= \langle (a \otimes \xi)\tilde{}, V(\eta)\rangle, \\ &= \langle (a \otimes \xi)\tilde{}, (1 \otimes \eta)\tilde{}\rangle, \\ &= \langle \varphi(1^* a)\xi, \eta\rangle, \\ &= \langle \varphi(a)\xi, \eta\rangle, \end{aligned}$$

y con ello se verifica que $\varphi(a) = V^*\pi(a)V$,

$$V^*\pi(a)V(\xi) = V^*\pi(a)(1 \otimes \xi)\tilde{} = V^*\varphi(1a \otimes \xi) = \varphi(a)(\xi).$$

□

2.4. El Teorema de Extensión de Arveson

El Teorema de Arveson nos brinda condiciones suficientes para extender un mapeo completamente positivo definido en un sistema de operadores a un álgebra C*. Antes de enunciarlo y demostrarlo será necesario trabajar en espacios de dimensión finita.

Proposición 2.39. *Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra C* y sean $\{e_{ij}\}$ las matrices elementales de $M_n(\mathbb{C})$. Un mapeo $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{A}$ es completamente positivo si y sólo si $[\varphi(e_{ij})]$ es positiva en $M_n(\mathfrak{A})$. En otras palabras,*

$$CP((M_n(\mathbb{C}), \mathfrak{A})) \ni \varphi \mapsto [\varphi(e_{ij})] \in M_n(\mathfrak{A})_+,$$

es una correspondencia biyectiva.

Demostración. Para probar la primera implicación basta dar un argumento similar al que se muestra en el Teorema de Stinespring:

$$[e_{ij}] = \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & \dots & 0 \\ e_{21} & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ e_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$[e_{ij}] \in M_n(M_n(\mathbb{C}))$ es positiva por ser múltiplo de una proyección de rango 1, con ello se tiene la primera implicación.

Supongamos ahora que para cada e_{ij} se tiene que $a = [\varphi(e_{ij})] \geq 0$ en $M_n(\mathfrak{A})$ Sea $a^{1/2} = [b_{ij}]$, es decir $a = [b_{ij}][b_{ij}]$, entonces

$$a(i,j) = \varphi(e_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b^*{}_{ki} b_{kj.}$$

Sea $\mathfrak{A} \subseteq \mathscr{B}(\mathscr{H})$ una representacion fiel y defina $V : \mathscr{H} \to \ell_n^2 \otimes \ell_n^2 \otimes \mathscr{H}$ por medio de

$$V\xi = \sum_{j,k=1}^{n} \zeta_j \otimes \zeta_k \otimes b_{kj},$$

con $\{\zeta_j\}$ la base ortonormal canónica para ℓ_n^2. Entonces, para $T = [t_{ij}] \in M_n(\mathbb{C}), \xi, \eta \in \mathscr{H}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle V^*(T \otimes 1 \otimes 1)V\eta, \xi \rangle &= \langle (T \otimes 1 \otimes 1)V\eta, V\xi \rangle, \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \langle T\zeta_j, \zeta_i \rangle \langle \zeta_k, \zeta_l \rangle \langle b_{kj}\eta, b_{li}\xi \rangle, \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij} \left\langle \sum_{k=1}^{n} b^*{}_{ki} b_{kj}\eta, \xi \right\rangle, \\ &= \left\langle \varphi(\sum_{ij}^{n} t_{ij} e_{ij})\eta, \xi \right\rangle, \\ &= \langle \varphi(T)\eta, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi(T) = V^*(T \otimes 1 \otimes 1)V$ para cada $T \in M_n(\mathbb{C})$ y φ es completamente positivo si. □

Definición 2.40. Dada una función $\varphi : \mathfrak{A} \to M_n(\mathbb{C})$ lineal se define una funcional $\hat{\varphi}$ en $M_n(\mathfrak{A})$ por medio de

$$\hat{\varphi}([a_{ij}]) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(a_{ij})_{ij},$$

donde $\varphi(a_{ij})_{ij}$ representa a la entrada (i,j) de la matriz $\varphi(a_{ij})$.

Proposición 2.41. *Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra C^* unitaria. Un mapeo $\varphi : \mathfrak{A} \to M_n(\mathbb{C})$ es completamente positivo si y solo si $\hat{\varphi}$ es positiva en $M_n(\mathfrak{A})$. En otras palabras,*

$$CP(\mathfrak{A}, M_n(\mathbb{C})) \ni \varphi \mapsto \hat{\varphi} \in M_n(\mathfrak{A})_+^*,$$

es una correspondencia biyectiva.

Demostración. Sea $\{\zeta_i\}$ la base ortonormal canónica para ℓ_n^2 y sea $\zeta = [\zeta_1, \ldots, \zeta_n]^T \in (\ell_n^2)^n$. Para $[a_{ij}] \in M_n(\mathfrak{A})$ se tiene que

$$\hat{\varphi}([a_{ij}]) = \sum_{ij}^{n} \varphi(a_{ij})_{ij} = \left\langle \varphi_n[a_{ij}]\zeta, \zeta \right\rangle,$$

de modo que la positividad de la n-ésima amplificación implica la de $\hat{\varphi}$.

Suponga ahora que $\hat{\varphi}$ es positiva y sea $(\pi, \mathscr{H}, \xi)$ la tripleta GNS asociadad a $\hat{\varphi}$. Sean $\{e_{ij}\}$ las matrices elementales estándar para $M_n(\mathbb{C})$ que también podemos ver como elementos en $M_n(\mathfrak{A})$. Definimos $V : \ell_n^2 \to \mathscr{H}$ por medio de $V\zeta_j = \pi(e_{1,j})\xi$, entonces

$$\left\langle V^*\pi \begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix} \zeta_j, \zeta_i \right\rangle = \varphi(a)_{ij}.$$

y se concluye que φ es completamente positivo. □

Lema 2.42. *Sea $\mathscr{E} \subseteq \mathfrak{A}$ un subsistema de operadores y $\varphi : \mathscr{E} \to \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces $\|\varphi\| = \varphi(1)$. Por lo tanto cualquier extensión a $\mathfrak{A}$ de φ que preserve su norma también es positiva.*

Demostración. Sea $x \in \mathscr{E}$ fijo tal que $\|x\| \leq 1$ y $|\varphi(x)|$ es suficientemente cercano a $\|\varphi\|$. Dado que podemos multiplicar por un número complejo de módulo 1 para rotar a $\varphi(x)$ se puede suponer sin pérdida de generalidad que $0 < \varphi(x) \in \mathbb{R}$. Como las funciones positivas son autoadjuntas entonces se tiene que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x + x^*),$$

y por lo tanto se puede suponer que x es autoadjunto. De aquí se tiene que $x \leq \|x\| 1$ y por lo tanto

$$\varphi(x) \leq \varphi(1) \|x\|,$$

con lo cual $\|\varphi\| = \varphi(1)$. Finalmente, se afirma que φ es positiva porque $\varphi(1) = \|\varphi\|$ [KR97, Prop 4.3.2]. □

Proposición 2.43. *Sea $\mathscr{E} \subseteq \mathfrak{A}$ un subsistema de operadores y $\varphi : \mathscr{E} \to M_n(\mathbb{C})$ un mapeo completamente positivo. Entonces φ se extiende a un mapeo completamente positivo de $\mathfrak{A}$ en $M_n(\mathbb{C})$.*

Demostración. Dado φ definimos la funcional $\hat{\varphi}$ sobre $M_n(\mathscr{E})$ y ésta es positiva. Por el teorema de Hahn-Banach para espacios localmente convexos se puede extender a una función completamente positiva sobre todo $M_n(\mathfrak{A})$, $\hat{\psi}$ preservando su norma y por el lema anterior, 2.42, se puede asegurar que la extensión es completamente positiva. Finalmente, por 2.41 ésta está en correspondencia con una función completamente positiva $\psi : \mathfrak{A} \to M_n(\mathbb{C})$ y con ello concluye la prueba. □

Sean X, Y espacios de Banach y Y^* el dual de Y. Denotaremos por $\mathscr{B}(X, Y^*)$ a las transformaciones lineales acotadas de X en Y^*. Construiremos un espacio Z tal que $\mathscr{B}(X, Y^*) \approx Z^*$ para dotar a $\mathscr{B}(X, Y^*)$ con una topología débil-*.

Sean $x \in X$ y $y \in Y$. Definimos el funcional $x \otimes y$ en $\mathscr{B}(X, Y^*)$ dado por $x \otimes y(L) = L(x)(y)$. Como $|x \otimes y(L)| = |L(x)(y)| \leq \|L(x)\| \|y\| \leq \|L\| \|x\| \|y\|$ entonces $x \otimes y \in \mathscr{B}(X, Y^*)$ y $\|x \otimes y\| \leq$

$\|x\|\,\|y\|$, de hecho $\|x\otimes y\| = \|x\|\,\|y\|$. Sea Z la cerradura de $span\{x\otimes y : x\in X, y\in Y\}$. En el caso en que tanto X como Y sean espacios de Hilbert se usará misma notación que se ha usado antes, $x\otimes y$ es el operador de dimensión 1 dado por $(x\otimes y^*)z = \langle z,y\rangle x$.

Lema 2.44. *Sean X y Y espacios de Banach. Dados $x\in X$ y $y\in Y$ denotamos por $x\otimes y$ a la funcional en $\mathscr{B}(X,Y^*)$ definida como $x\otimes y(L) = L(x)(y)$. Sea Z el subespacio cerrado generado por elementos de esta forma. Entonces $\mathscr{B}(X,Y^*)$ es isométricamente isomorfo a Z^* con la dualidad dada por*

$$\langle L, x\otimes y\rangle = x\otimes y(L).$$

Demostración. La relación anterior define un isomorfismo isométrico. Para verificar que es sobreyectiva tomemos $f\in Z^*$ y para cada x definimos $f_x : Y\to\mathbb{C}$ como $f_x(y) = f(x\otimes y)$. Note que $|f_x(y)| = |f(x\otimes y)| \le \|f\|\,\|x\|\,\|y\|$, luego $f_x\in Y^*$y. Si definimos $L(x) = f_x$, entonces $L : X\to Y^*$ y L es acotada con $\|L\|\le\|f\|$. Así $L\in\mathscr{B}(X,Y^*)$ y $L\mapsto f$ completa la prueba. □

Definición 2.45. A la topología débil* inducida sobre $\mathscr{B}(X,Y^*)$ por medio de esta identificación la llamamos la topología BW.

Lema 2.46. *Sea $\{L_\lambda\}$ una red acotada en $\mathscr{B}(X,Y^*)$. Entonces L_λ converge a L en la topología BW si y sólo si $L_\lambda(x)$ converge débilmente a $L(x)$ para cada $x\in X$.*

Demostración. Si L_λ converge a L en la topología BW entonces $L_\lambda(x)(y) = \langle L_\lambda, (x\otimes y)\rangle \to \langle L,(x\otimes y)\rangle = L(x)(y)$ para toda $y\in Y$. Por lo tanto $L_\lambda(x)$ converge débilmente a $L(x)$ para cada $x\in X$. Si $L_\lambda(x)$ converge débilmente a $L(x)$ para toda x entonces $\langle L_\lambda,(x\otimes y)\rangle$ converge a $\langle L,(x\otimes y)\rangle$ para todos x,y y por lo tanto en el generado lineal de tensores elementales. como la red es acotada también converge en su cerradura. □

Proposición 2.47. *Sea X un espacio de Banach y sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces una red acotada $\{L_\lambda\}$ en $\mathscr{B}(X,\mathscr{B}(\mathscr{H}))$ converge a L en la topología BW si y sólo si $\langle L_\lambda(x)h,k\rangle$ converge a $\langle L(x)h,k\rangle$ para cualesquiera $h,k\in\mathscr{H}$ y $x\in X$.*

Demostración. La red $\{L_\lambda\}_\lambda$ converge a L en la topología BW si y sólo si $tr(L_\lambda(x)T)\to tr(L(x)T)$ para cada $T\in TC$ y $x\in X$, pero como la red es acotada y los operadores de rango finito son densos es TC entonces basta considerar operadores de la forma $T = R_{h,k}$. □

Definición 2.48. Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra C*, $\mathscr{S}$ un sistema de operadores y $\mathscr{M}$ un subespacio.

- $B_r(\mathscr{M},\mathscr{H}) = \{L\in\mathscr{B}(\mathscr{M},\mathscr{B}(\mathscr{H})) : \|L\|\le r\}$.
- $CP_r(\mathscr{S},\mathscr{H}) = \{L\in\mathscr{B}(\mathscr{S},\mathscr{B}(\mathscr{H})) : \|L\|\le r, L \text{ es c.p.}\}$.

Observación 2.49. *Los conjuntos anteriores son compactos. El primero porque la bola con la topología débil-* es compacta por el Teorema de Banach-Alaoglu, y el segundo por ser un subconjunto cerrado del primero.*

Teorema 2.50 (Arveson)**.** *Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra* C* *unitaria y $\mathscr{E}\subseteq\mathfrak{A}$ un subsistema de operadores. Entonces todo mapeo completamente positivo $\varphi : \mathscr{E}\to\mathscr{B}(\mathscr{H})$ se extiende a un mapeo completamente positivo $\psi : \mathfrak{A}\to\mathscr{B}(\mathscr{H})$.*

Demostración. Para cada subespacio de dimensión finita $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}$ podemos definir $\varphi_{\mathscr{F}}$ como la compresión de φ a $\mathscr{F}$, es decir, $\varphi_{\mathscr{F}} : \mathscr{E} \to \mathscr{B}(\mathscr{F})$ con $\varphi_{\mathscr{F}} = P_{\mathscr{F}}\varphi P_{\mathscr{F}}$, con $P_{\mathscr{F}}$ la proyección sobre $\mathscr{F}$, y que toma valores en un álgebra de matrices. Por 2.43 existe un mapeo completamente positivo $\psi_{\mathscr{F}} : \mathfrak{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{F})$ que extiende a $\varphi_{\mathscr{F}}$. Finalmente podemos considerar estas mismas funciones como si tuvieran codominio en $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ definiendo su valor como 0 en $\mathscr{F}^{\perp}$.

Recordemos que el conjunto de subespacios de dimensión finita es un conjunto dirigido al considerar la contención y que de esta manera $\{P_{\mathscr{F}}\}_{\mathscr{F}}$ es una red que converge SOT a 1. Asimismo, las extensiones con las que hemos trabajado preservan normas, por lo que $\|\psi_{\mathscr{F}}\| \leq \|\varphi\|$ y con ello $\{\psi_{\mathscr{F}}\}$ es una red en $CP_r(\mathscr{S},\mathscr{H})$ con $r = \|\varphi\|$. Por compacidad la red $\psi_{\mathscr{F}}$ tiene un punto de acumulación $\psi \in CP_r(\mathscr{S},\mathscr{H})$ y una subred que converge a éste. Se afirma que ψ es una extensión que cumple lo deseado. En efecto, sean $a \in \mathscr{E}$, $x,y \in \mathscr{H}$ y $\mathscr{F}$ el espacio generado por x,y. Para cualquier espacio $\mathscr{F}_1 \supseteq \mathscr{F}$ se tiene que $\langle \varphi(a)x,y\rangle = \langle \psi_{\mathscr{F}}(a)x,y\rangle$, como el conjunto de dichos espacios $\mathscr{F}_1$ es cofinal entonces $\langle \varphi(a)x,y\rangle = \langle \psi(a)x,y\rangle$ y con ello concluye la prueba. □

3. El truco de linearización desde el punto de álgebras C*

Empecemos por considerar dos álgebras C* con 1, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, y elementos autoadjuntos $x_1,\ldots,x_r \in \mathfrak{A}$, $y_1,\ldots,y_r \in \mathfrak{B}$. Definimos $\mathfrak{A}_0$ y $\mathfrak{B}_0$ como las álgebras

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_0 =& \mathrm{C}^*(1_{\mathfrak{A}},x_1,\ldots,x_r),\\ \mathfrak{B}_0 =& \mathrm{C}^*(1_{\mathfrak{B}},y_1,\ldots,y_r),\end{aligned}$$

y a $\mathscr{E}$ y $\mathscr{F}$ como los sistemas de operadores generados por $\{1_{\mathfrak{A}},x_1\ldots,x_r,\sum_{i=1}^r x_i^2\}$ y $\{1_{\mathfrak{B}},y_1\ldots,y_r,\sum_{i=1}^r y_i^2\}$, respectivamente. Note que debido a que se consideraron elementos autoadjuntos entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{E} =& span\{1_{\mathfrak{A}},x_1,\ldots,x_r,\sum_{i=1}^r x_i^2\},\\ \mathscr{F} =& span\{1_{\mathfrak{B}},y_1,\ldots,y_r,\sum_{i=1}^r y_i^2\}.\end{aligned}$$

El truco de linearización es descrito por el siguiente teorema

Teorema 3.1. *Sean $x_1,\ldots,x_r \in \mathfrak{A}_{sa}$ y $y_1,\ldots,y_r \in \mathfrak{B}_{sa}$. Si para toda $m \in \mathbb{N}$ y $a_0,a_1,\ldots,a_r \in M_m(\mathbb{C})_{sa}$ se tiene que*

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(a_0\otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^r a_i\otimes x_i) \supseteq \sigma_{\mathfrak{B}}(a_0\otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^r a_i\otimes y_i), \tag{2}$$

entonces existe un homomorfismo- unitario*

$$\varphi : \mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{B}_0,$$

tal que $\varphi(x_i) = y_i, i = 1,\ldots,r$.

Observación 3.2. *Sea V un subespacio vectorial de $M_m(\mathbb{C})$ tal que $1_m \in V$, entonces la condición*

$$\forall a_0, a_1, \ldots, a_r \in V,\ \sigma_{\mathfrak{A}}(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i) \supseteq \sigma_{\mathfrak{B}}(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i),$$

es equivalente a la condición

$$\forall a_0, a_1, \ldots, a_r \in V,\ a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i \text{ es invertible implica que } a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i \text{ es invertible.}$$

Demostración. Claramente el segundo enunciado es consecuencia del primero, si $a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i$ es invertible entonces 0 pertenece a su resolvente y también al de $1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i$. Para demostrar la segunda implicación basta considerar $\lambda \in \mathbb{C}$, si $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{B}}(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i)$ entonces $(a_0 - \lambda 1_m) \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i$ no es invertible, por hipótesis $(a_0 - \lambda 1_m) \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i$ tampoco lo es y por tanto $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{A}}(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i)$. □

Observación 3.3. *Notemos ahora que la hipótesis (2) es equivalente a un enunciado aparentemente más general:*
Para toda $m \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_r \in M_m(\mathbb{C})$ se tiene que

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i) \supseteq \sigma_{\mathfrak{B}}(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i), \tag{3}$$

Demostración. Para $a_0, a_i, \ldots, a_r \in M_m(\mathbb{C})$ se definen las matrices $\tilde{a}_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i^* \\ a_i & 0 \end{pmatrix}$ con $i = 1, \ldots, r$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 \otimes 1 + \sum \tilde{a}_i \otimes x_i &= \begin{pmatrix} 0 & a_0^* \otimes 1 + \sum a_i^* \otimes x_i \\ a_0 \otimes 1 + \sum a_i \otimes x_i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \otimes 1 + \sum a_i \otimes x_i & 0 \\ 0 & a_0^* \otimes 1 + \sum a_i^* \otimes x_i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{a}_0 \otimes 1 + \sum \tilde{a}_i \otimes x_i$ es invertible en $M_{2m}(\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{A}$ si y sólo si $a_0 \otimes 1 + \sum a_i \otimes x_i$ es invertible en $M_m(\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{A}$. □

Proposición 3.4. *Sean $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ espacios de Hilbert y considere su suma directa $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Considere ahora el operador $R \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ dado por*

$$R = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H}_2)} \end{pmatrix}, x \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1), y \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_2), z \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2),$$

entonces R es invertible si y sólo si $x - yz$ es invertible.

Demostración. La prueba se sigue de la asiguiente factorización de R:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H}_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{\mathscr{B}(H)_1} & y \\ 0 & 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H}_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - yz & 0 \\ 0 & 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H}_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H}_1)} & 0 \\ 0 & 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H}_2)} \end{pmatrix}.$$

La primera y última matrices en la factorización son invertibles y sus inversas están dadas por

$$\begin{pmatrix} 1_{\mathscr{B}(H)_1} & y \\ 0 & 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H}_2)} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1_{\mathscr{B}(H)_1} & -y \\ 0 & 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H}_2)} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H}_1)} & 0 \\ z & 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H}_2)} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H}_1)} & 0 \\ -z & 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H}_2)} \end{pmatrix}.$$

□

Por medio de esta última proposición y la observación 3.2 se puede observar que la condición 2 implica que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall a_0, a_1, \ldots, a_r, a_{r+1} \in M_m(\mathbb{C}) :$$
$$\sigma_{\mathfrak{A}}(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i + a_{r+1} \otimes \sum_{i=1}^{r} x_i^2) \supseteq \sigma_{\mathfrak{B}}(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i + a_{r+1} \otimes \sum_{i=1}^{r} y_i^2), \tag{4}$$

para ello basta mostrar que la invertibilidad de $a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i + a_{r+1} \otimes \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \in M_m(\mathfrak{A})$ implica la invertibilidad de $a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i + a_{r+1} \otimes \sum_{i=1}^{r} y_i^2 \in M_m(\mathfrak{B})$. Considere el siguiente par de matrices:

$$S = \begin{pmatrix} a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} & -1_m \otimes x_1 & -1_m \otimes x_2 & \ldots & -1_m \otimes x_r \\ a_1 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + a_{r+1} \otimes x_1 & 1_m \otimes 1_{\mathfrak{A}} & & & 0 \\ a_2 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + a_{r+1} \otimes x_2 & & 1_m \otimes 1_{\mathfrak{A}} & & \\ \vdots & & & & \ddots \\ a_r \otimes 1_{\mathfrak{A}} + a_{r+1} \otimes x_r & 0 & & & 1_m \otimes 1_{\mathfrak{A}} \end{pmatrix} \in M_{(r+1)m}(\mathfrak{A}),$$

y

$$T = \begin{pmatrix} a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} & -1_m \otimes y_1 & -1_m \otimes y_2 & \ldots & -1_m \otimes y_r \\ a_1 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + a_{r+1} \otimes y_1 & 1_m \otimes 1_{\mathfrak{B}} & & & 0 \\ a_2 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + a_{r+1} \otimes y_2 & & 1_m \otimes 1_{\mathfrak{B}} & & \\ \vdots & & & & \ddots \\ a_r \otimes 1_{\mathfrak{B}} + a_{r+1} \otimes y_r & 0 & & & 1_m \otimes 1_{\mathfrak{B}} \end{pmatrix} \in M_{(r+1)m}(\mathfrak{B}).$$

Por (3.4) la invertibilidad de la matriz S es equivalente a la del polinomio $a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i + a_{r+1} \otimes \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \in M_m(\mathfrak{A})$ y similarmente la de T es equivalente a la de $a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i + a_{r+1} \otimes \sum_{i=1}^{r} y_i^2 \in M_m(\mathfrak{B})$, por lo tanto únicamente queda demostrar que la invertibilidad de S implica la de T, sin embargo ésto es inmediato de (3) porque S y T son polinomios en $x_1, \ldots, x_r$ y $y_1, \ldots, y_r$, respectivamente, es decir, $S = b_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} b_i \otimes x_i$, $T = b_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} b_i \otimes y_i$ con

$$b_0 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & 1_m & & & 0 \\ a_2 & & 1_m & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_r & 0 & & & 1_m \end{pmatrix}$$

y

$$b_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -1_m & 0\dots 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ a_{r+1} & & & 0 & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2 \dots, r.$$

Consideremos el caso en que $m = 1$, es decir, se toman coeficientes en $\mathbb{C}$ y se tiene que para cualesquiera $a_0, a_1, \dots, a_{r+1} \in \mathbb{C}$

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i + a_{r+1} \otimes \sum_{i=1}^{r} x_i^2) \subseteq \sigma_{\mathfrak{B}}(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i + a_{r+1} \otimes \sum_{i=1}^{r} y_i^2).$$

Si los coeficientes se restringen a $\mathbb{R}$ entonces los operadores $a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i + a_{r+1} \otimes \sum_{i=1}^{r} x_i^2$ y $a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i + a_{r+1} \otimes \sum_{i=1}^{r} y_i^2$ son autoadjuntos, por lo que al aplicar la Fórmula del Radio espectral se tiene que

$$\forall a_0, a_1, \dots, a_{r+1} \in \mathbb{R}:$$

$$\left\| a_0 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i x_i + a_{r+1} \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \right\| \geq \left\| a_0 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i y_i + a_{r+1} \sum_{i=1}^{r} y_i^2 \right\|.$$

Sean $\mathscr{E}' = span_{\mathbb{R}}\{1_{\mathfrak{A}}, x_1, \dots, x_r, \sum_{i=1}^{r} x_i^2\}$ y $\mathscr{F}' = span_{\mathbb{R}}\{1_{\mathfrak{B}}, y_1, \dots, y_r, \sum_{i=1}^{r} y_i^2\}$. De la desigualdad anterior se sigue que existe una función $\mathbb{R}$-lineal bien definida $u_0' : \mathscr{E}' \to \mathscr{F}'$ tal que $u_0'(1_{\mathfrak{A}} = 1_{\mathfrak{B}}), u_0'(x_i) = y_i, i = 1, \dots, r$ y $u_0'(\sum_{i=1}^{r} x_i^2) = \sum_{i=1}^{r} y_i^2$. Dado $x \in \mathscr{E}$ sus partes real e imaginaria están definidas por $\Re(x) = \frac{1}{2}(x + x^*)$ y $\Im(x) = \frac{1}{2i}(x - x^*)$, ambos son elementos autoadjuntos y pertenecen a $\mathscr{E}'$ por lo que se puede definir una función $u_0 : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ como

$$u_0(x) = u_0'(\Re(x)) + i u_0'(\Im(x)).$$

Observación 3.5. *$u_0 : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ es una función $\mathbb{C}$-lineal que extiende a u_0'.*

Demostración. Si $x \in \mathscr{E}'$ entonces es un elemento autoadjunto y $\Im(x) = 0$ por lo que $u_0(x) = u_0'(x)$ y u_0 es una extensión de u_0'. Veamos ahora que es $\mathbb{C}$-lineal.

Para $x, y \in \mathscr{E}$ se tiene que $\Re(x+y) = \Re(x) + \Re(y)$ y $\Im(x+y) = \Im(x) + \Im(y)$ por lo que claramente $u_0(x+y) = u_0(x) + u_0(y)$. Considere ahora $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\lambda x = (\Re\lambda + i\Im\lambda)(\Re(x) + i\Im(x)) = (\Re\lambda\Re(x) - \Im\lambda\Im(x)),$$

ahora calculamos $u_0(\lambda x)$ y $\lambda u_0(x)$

$$\begin{aligned} u_0(\lambda x) =& u_0'(\Re\lambda\Re(x) - Im\lambda\Im(x)) + i u_0'(\Re\lambda\Im(x) + \Im\lambda\Re(x)), \\ =& \Re\lambda u_0'(\Re(x)) - \Im\lambda u_0'(\Im(x)) + i\Re\lambda u_0'(\Im(x)) + i\Im\lambda u_0'(\Re(x)) \\ \lambda u_0(x) =& (\Re\lambda + i\Im\lambda) u_0(\Re(x) + i\Im(x)), \\ =& (\Re\lambda + i\Im\lambda)(u_0'(\Re(x)) + i u_0'(\Im(x))), \\ =& \Re\lambda u_0'(\Re(x)) + i\Re\lambda u_0'(\Im(x)) + i\Im\lambda u_0'(\Re(x)) - \Im\lambda u_0'(\Im(x)), \end{aligned}$$

y con ello se demuestra que u_0 es $\mathbb{C}$-lineal. □

Recordemos que un operador normal es positivo si y sólo si su espectro es no negativo, de manera que la condición (4) y las propiedades de u_0 aseguran que para toda $m \in \mathbb{N}$ la función $id_{M_m(\mathbb{C})} \otimes u_0$ preserva positividad. Dado que la n-ésima amplificación de u_0 no es otra cosa que $id_{M_m(\mathbb{C})} \otimes u_0$ se tiene que u_0 es un mapeo completamente positivo.

Lema 3.6. *Suponga que $u_0 : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ es un mapeo lineal unitario y completamente positivo tal que*

$$u_0(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

y

$$u_0(\sum_{i=1}^{r} x_i^2) = \sum_{i=1}^{r} y_i^2.$$

Entonces existe un homomorfismo- suprayectivo $u : \mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{B}_0$ tal que*

$$u_0 = u_{|E}.$$

Demostración. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que para algún espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, $\mathfrak{B}$ es una subálgebra unitaria de $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Por el Teorema de extensión de Arveson 2.50 $u_0 : \mathscr{E} \to \mathscr{F} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathscr{B}(\mathscr{H})$ se extiende a un mapeo completamente positivo definido sobre todo $\mathfrak{A}$ y al cual denotaremos de la misma manera, $u_0 : \mathfrak{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Por el Teorema de Stinespring existe un espacio de Hilbert $\mathscr{K}$, un homomorfismo-* $\pi : \mathfrak{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{K})$ y un operador acotado $V : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ tal que $u_0(x) = V^* \pi(x) V$ para cada $x \in \mathscr{E}$. Veamos que podemos suponer también que $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{K}$ y que V es la proyección ortogonal de $\mathscr{K}$ sobre $\mathscr{H}$, a la cual denotaremos por p.

Si uno retoma la prueba del Teorema de Stinespring 2.38 se observa que el espacio $\mathscr{K}$ es la completación de $\mathfrak{A} \odot \mathscr{H} / {}_{[,]}$ y $V : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ está dado por $V(\xi) = (1_{\mathfrak{A}} \otimes \xi)\widehat{\ }$, donde $(1_{\mathfrak{A}} \otimes \xi)\widehat{\ }$ es la clase de equivalencia de $1_{\mathfrak{A}} \otimes \xi$. Note que

$$\begin{aligned} \|V(\xi)\|^2 &= \|(1_{\mathfrak{A}} \otimes \xi)\widehat{\ }\|, \\ &= [1_{\mathfrak{A}} \otimes \xi, 1_{\mathfrak{A}} \otimes \xi], \\ &= \langle u_0(1_{\mathfrak{A}}^* 1_{\mathfrak{A}})\xi, xi \rangle, \\ &= \|\xi\|^2, \end{aligned}$$

por lo que V es una isometría. Veamos que $V^* V_{|RanV} = 1_{RanV}$, dicho de otra manera $V^* = p$ si y sólo si para todo $x, y \in \mathscr{K}$ se tiene que $\langle V^* x, y \rangle = \langle px, y \rangle$. Sea $(a \otimes \eta)\widehat{\ } \in X$, dado $\xi \in \mathscr{H}$

$$\begin{aligned} \langle V^*(a \otimes \eta)\widehat{\ }, \xi \rangle &= \langle (a \otimes \eta)\widehat{\ }, V(\xi) \rangle, \\ &= \langle (a \otimes \eta)\widehat{\ }, (1_{\mathfrak{A}} \otimes \xi)\widehat{\ } \rangle, \\ &= \langle u_0(1_{\mathfrak{A}}^* a)\eta, \xi \rangle, \\ &= \langle u_0(a)\eta, \xi \rangle, \\ &= \langle u_0(a)\eta, \xi \rangle, \end{aligned}$$

por lo tanto $V^*(a \otimes \eta)\widehat{\ } = u_0(a)\eta$ y $V^* V \xi = V^*(1_{\mathfrak{A}} \otimes \xi)\widehat{\ } = u_0(1_{\mathfrak{A}}\xi) = \xi$ y finalmente $V^* V \xi = \xi$ para cada $\xi \in \mathscr{H}$, con ello concluimos que $V^* = p$ y $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{K}$.

Estas observaciones nos permiten reescribir la identidad $u_0(x) = V^* \pi(x) V$ como $u_0(x) = p\pi(x)p$. Como u_0 es unitaria y π es un homomorfismo-* entonces

1. $u_0((1_{\mathfrak{A}})) = p\pi(1_{\mathfrak{A}})p = p = 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H})}$,
2. $y_i = u_0(x_i) = p\pi(x_i)p, \quad i = 1,\dots,r$,
3. $\sum_{i=1}^r y_i^2 = u_0(\sum_{i=1}^r x_i^2) = \sum_{i=1}^r p\pi(x_i)^2 p$.

Usando (2) y (3)

$$\sum_{i=1}^r p\pi(x_i)p\pi(x_i)p = \sum_{i=1}^r p\pi(x_i)pp\pi(x_i)p = \sum_{i=1}^r y_i^2 = \sum_{i=1}^r p\pi(x_i)^2 p,$$

por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^r np\pi(x_i)(1_{\mathscr{B}(\mathscr{H})} - p)\pi(x_i)p &= \sum_{i=1}^r \left(p\pi(x_i) - p\pi(x_i)p\right)\pi(x_i)p,\\ &= \sum_{i=1}^r p\pi(x_i)\pi(x_i)p - p\pi(x_i)p\pi(x_i)p,\\ &= \sum_{i=1}^r y_i^2 - y_i^2,\\ &= 0.\end{aligned}$$

Así, al definir $b_i = (1_{\mathscr{B}(\mathscr{H})} - p)\pi(x_i)p$ para $i = 1,\dots,r$ tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^r b_i^* b_i &= \sum_{i=1}^r \left[(1_{\mathscr{B}(\mathscr{H})} - p\pi(x_i))\right]^* \left[(1_{\mathscr{B}(\mathscr{H})} - p)\pi(x_i)p\right],\\ &= \sum_{i=1}^r \left[p^*\pi(x_i)^*(1_{\mathscr{B}(\mathscr{H})} - p)^*\right] \left[(1_{\mathscr{B}(\mathscr{H})} - p)\pi(x_i)p\right],\\ &= \sum_{i=1}^r \left[p\pi(x_i)(1_{\mathscr{B}(\mathscr{H})} - p)\right] \left[(1_{\mathscr{B}(\mathscr{H})} - p)\pi(x_i)p\right],\\ &= \sum_{i=1}^r p\pi(x_i)(1_{\mathscr{B}(\mathscr{H})} - p)\pi(x_i)p,\\ &= 0,\end{aligned}$$

como $b_i^* b_i \geq 0$ para cada $i = 1,\dots,r$, entonces $b_i^* b_i = 0$ y $b_i = 0$. Así, para $i = 1,\dots,r$ se observa que p conmuta con cada $\pi(x_i)$

$$\begin{aligned}[p,\pi(x_i)] &= p\pi(x_i) - \pi(x_i)p,\\ &= p\pi(x_i) - p\pi(x_i)p - \pi(x_i)p + p\pi(x_i)p,\\ &= p\pi(x_i)(1_{\mathscr{B}(\mathscr{H})} - p) - (1_{\mathscr{B}(\mathscr{H})} - p)\pi(x_i)p,\\ &= b_i^* - b_i,\\ &= 0.\end{aligned}$$

El álgebra C* $\pi(\mathfrak{A}_0)$ es generada por $\{\pi(1_{\mathfrak{A}}), \pi(x_1),\dots,\pi(x_r)\}$ y por lo tanto p conmuta con todos sus elementos.

Definimos ahora $u : \mathfrak{A}_0 \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ como

$$u(a) = p\pi(a)p, \quad a \in \mathfrak{A}_0.$$

Claramente $u(a^*) = p\pi(a^*)p = (p\pi(a)p)^* = u(a)^*$ y usando el inciso (1) $u(1_{\mathfrak{A}}) = p\pi(1_{\mathfrak{A}})p = 1_{\mathscr{B}(\mathscr{H})} = u_0(1_{\mathfrak{A}}) = 1_{\mathfrak{B}}$.

Dado que p conmuta con $\pi(a)$ para cada $a \in \mathfrak{A}_0$ entonces para cualesquiera $a, b \in \mathfrak{A}_0$ se tiene que

$$u(ab) = p\pi(ab)p = p\pi(a)\pi(b)p = p\pi(a)p^2\pi(b)p = u(a)u(b).$$

Por lo tanto $u : \mathfrak{A}_0 \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ es un homomorfismo-* unitario que extiende a u_0 y $u(\mathfrak{A}_0)$ es una subálgebra C* de $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Para concluir con la prueba basta verificar que $u(\mathfrak{A}_0)$ es generada, como álgebra C*, por $u(\{1_{\mathfrak{A}}, x_1, \ldots, x_r\})$, pero ello es evidentet puesto que $1_{\mathfrak{B}} = u(1_{\mathfrak{A}})$ y $y_i = u(x_i)$ para cada $i = 1, \ldots, r$, de modo que $u(\mathfrak{A}_0) = \mathrm{C}^*(1_{\mathfrak{B}}, y_1, \ldots, y_r) = \mathfrak{B}_0$. □

Es claro que éste último lema concluye la demostración del Teorema 3.1 y además se observa que el morfismo u es único puesto que todo elemento en $\mathfrak{A}_0$ y $\mathfrak{B}_0$ es un polinomio en $\{1_{\mathfrak{A}}, x_1, \ldots, x_r\}$ o $\{1_{\mathfrak{B}}, y_1, \ldots, y_r\}$, respectivamente, o un límite de éstos, por lo que si dos homomorfismos coinciden en los generadores también lo harán en toda el álgebra. Para concluir con esta sección se dará una versión más fuerte del teorema:

Teorema 3.7. *Suponga que $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{A}$, $y_1, \ldots, y_r \in \mathfrak{B}$ son elementos autoadjuntos que satisfacen la siguiente propiedad*

$$\begin{gathered} \forall m \in \mathbb{N}, \forall a_0, \ldots a_r \in M_M(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})_{sa} : \\ \sigma_{\mathfrak{A}}(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i) \supseteq \sigma_{\mathfrak{B}}(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i). \end{gathered} \tag{5}$$

Entonces existe un único homomorfismo- unitario y suprayectivo $u : \mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{B}_0$ tal que $u(x_i) = y_i$ para $i = 1, \ldots, r$.*

Demostración. Por el teorema 3.1 bastará probar que las condiciones (2) y (5) son equivalentes. Como la primera evidentemente implica a la segunda veremos que también se tiene la otra implicación.

Definición 3.8. Dados $K, L \subseteq \mathbb{C}$ se define su distancia de Hausdorff, $d_H(K, L)$ como

$$d_H(K, L) = \max\{\sup_{x \in K} d(x, L), \sup_{y \in L} d(y, K)\}.$$

Por [Dav86, Prop 2.1], si a, b son operadores normales en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y $U(a) = \{uau^* : u \text{ es unitario en } \mathscr{B}(\mathscr{H})\}$ entonces

$$dist(U(a), U(b)) \geq d_H(\sigma(a), \sigma(b)),$$

como $a \in U(a)$, $b \in U(b)$ entonces

$$d_H(\sigma(a), \sigma(b)) \leq \|a - b\|. \tag{6}$$

Suponga que se satisface (5), sean $m \in \mathbb{N}$ y $b_0, \ldots, b_r \in M_m(\mathbb{C})$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $M_m(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})_{sa}$ es denso en $M_m(\mathbb{C})_{sa}$ se pueden escoger $a_0, \ldots, a_r \in M_m(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})$ de manera que

$$\left\| (a_0 - b_0) \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} (a_i - b_i) \otimes x_i \right\| \leq \|a_0 - b_0\| + \sum_{i=1}^{r} \|a_i - b_i\| \, \|x_i\| < \varepsilon,$$

y

$$\left\| (a_0 - b_0) \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} (a_i - b_i) \otimes y_i \right\| \leq \|a_0 - b_0\| + \sum_{i=1}^{r} \|a_i - b_i\| \, \|y_i\| < \varepsilon.$$

Por (6)

$$d_H(\sigma(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i), \sigma(b_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} b_i \otimes x_i)) < \varepsilon,$$

y

$$d_H(\sigma(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i), \sigma(b_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} b_i \otimes y_i)) < \varepsilon.$$

Si $\lambda \in \sigma(b_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} \sum_{i=1}^{r} b_i \otimes y_i)$ entonces $d(\lambda, \sigma(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i)) < \varepsilon$, así

$$\sigma(b_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} \sum_{i=1}^{r} b_i \otimes y_i) \subseteq \sigma(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i) + (-\varepsilon, \varepsilon),$$

de modo que al hacer un análisis similar con los elementos x_i y utilizando la hipótesis (5) se observa

$$\begin{aligned} \sigma(b_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} \sum_{i=1}^{r} b_i \otimes y_i) &\subseteq \sigma(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes y_i) + (-\varepsilon, \varepsilon), \\ &\subseteq \sigma(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i) + (-\varepsilon, \varepsilon), \\ &\subseteq \sigma(b_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} b_i \otimes x_i) + (-2\varepsilon, \varepsilon). \end{aligned}$$

Dado que los operadores considerados son autoadjuntos entonces sus espectros son compactos y no vacíos, y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario entonces se tiene que

$$\sigma(b_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_{i=1}^{r} b_i \otimes y_i) \subseteq \sigma(b_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^{r} b_i \otimes x_i),$$

para toda $m \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $b_0, \ldots, b_r \in M_m(\mathbb{C})_{sa}$, es decir, se satisface (2) y con ello concluye la demostración. □

4. El truco de linealización, un enfoque algebraico

Los espacios de principal interés para esta técnica están dados por el producto tensorial de un espacio de matrices sobre $\mathbb{C}$ y el álgebra de polinomios en r variables no conmutativas, $M_{m,m'}(\mathbb{C}) \otimes$

$\mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$. Este producto se puede intepretar de dos maneras, primero como el espacio de matrices de dimensión mxm' con entradas en $\mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$, o bien, como el espacio de polinomios en r variables no conmutativas con coeficientes en en $M_{m,m'}(\mathbb{C})$ y se relacionan mediante el siguiente isomorfismo. Dada una matriz $A=(a(i,j))_{1\leq i\leq m,1\leq j\leq m'}$ con entradas en $\mathbb{C}\langle X_1,\ldots X_r\rangle$:

$$\psi(A)=\sum_{i\leq m,j\leq m'} E(i,j)\otimes a(i,j), \tag{7}$$

donde $E(i,j)$ representa a la matriz elemental de dimensión mxm' con entrada (i,j) igual a 1.

Una de las virtudes fundamentales de estas matrices es el simplificar objetos a cambio de aumentar la dimensión de las matrices, ésto dentro de una familia de espacios cuyas propiedades algebraicas son esencialmente las mismas. La siguiente proposición ilustra este proceso, se mostrará que todo polinomio se puede factorizar como producto de polinomios cada uno de grado menor o igual a 1.

Proposición 4.1. *Sean d,m,m' enteros positivos y sea p un polinomio el $M_{m,m'}\otimes\mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$ de grado d. Entonces existen enteros positivos $m_1,m_2,\ldots,m_{d+1}$ y polinomios*

$$u_j\in M_{m_j,m_{j+1}}(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$$

tales que

1. $m_1=m$ *y* $m_{d+1}=m'$.
2. $deg(u_j)\leq 1,\ j\in\{1,\ldots,r\}$.
3. $p=u_1u_2\ldots u_d$.

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre d. Si $d=1$ entonces el polinomio ya es de grado 1 y no hay nada que demostrar. Supongamos que $d\geq 2$ y que la afirmación se ha probado para todos lo polinomios en $M_{m,m'}(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$ de grado menor o igual a $d-1$. Sea $p\in M_{m,m'}(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$ de grado d y $X_0=1_{\mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle}$. Notamos que p se escribe como

$$p(X_1,\ldots,X_r)=\sum_{0\leq i_1,\ldots,i_d\leq r} c(i_1,\ldots,i_d)\otimes X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_d}, \tag{8}$$

para algunas matrices

$$c(i_1,\ldots,i_d)\in M_{m,m'}(\mathbb{C}),\quad i_1,i_2,\ldots,i_d\in 0,\ldots,r.$$

Considere el índice $i_1\in 0,1,\ldots,r$ y se define

$$Y(i_1)=\sum_{0\leq i_2,\ldots,i_d} c(i_1,\ldots,i_d)\otimes X_{i_2}\ldots X_{i_d},$$

$Y(i_1)$ representa el término que se obtiene de factorizar $1_m\otimes X_{i_1}$ de todos aquellos sumandos cuya primera variable es X_{i_1} en el desarrollo de p 8.

Al hacer este procedimiento para cada una de las variables obtenemos que

$$\begin{aligned} p(X_1,\ldots,X_r) &= \sum_{i_1=0}^{r} (1_m \otimes X_{i_1}) \left(\sum_{0\leq i_2,\ldots,i_d} c(i_1,i_2,\ldots,i_d) \otimes X_{i_2}\ldots X_{i_d} \right), \\ &= \sum_{i_1=0}^{r} (1_m \otimes x_{i_1}) Y(i_1), \\ &= \begin{pmatrix} 1_m \otimes X_0 & 1_m \otimes X_1 & \ldots & 1_m \otimes X_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y(0) \\ Y(1) \\ \vdots \\ Y(r) \end{pmatrix}, \\ &= u_1(X_1,\ldots,X_r) \cdot p'(X_1,\ldots,X_r), \end{aligned}$$

donde definimos

$$u_1(X_1,\ldots,X_r) = \begin{pmatrix} 1_m \otimes X_0 & 1_m \otimes X_1 & \ldots & 1_m \otimes X_r \end{pmatrix} \in M_{m,(r+1)m}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle,$$

y

$$p'(X_1,\ldots,X_r) = \begin{pmatrix} Y(0) \\ Y(1) \\ \vdots \\ Y(r) \end{pmatrix} \in M_{(r+1)m,m'}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle.$$

El isomorfismo propuesto en 7 nos permite observar que $deg(u_1) = 1$ y que $deg(p') \leq d-1$, pues $deg(Y(i)) \leq d-1$ para cada $i \in \{0,\ldots,r\}$. Por hipótesis de inducción existen enteros positivos $m_2, m_3, \ldots, m_{d+1}$ y polinomios $u_j \in M_{m_j,m_{j+1}}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$, $j \in 2,\ldots,d$ tales que

1. $m_2 = (r+1)m$ y $m_{d+1} = m'$.
2. $deg(u_j) \leq 1$, $j \in \{2,\ldots,r\}$.
3. $p' = u_2 \ldots u_d$.

Con ello, el polinomio $p = u_1 p' = u_1 u_2 \ldots u_d$ es la descomposición buscada. □

Observación 4.2. *La prueba anterior da de manera implícita los valores de $m_2, m_3, \ldots, m_d$. Se observó que $u_1(X_1,\ldots,X_r) = \begin{pmatrix} 1_m \otimes X_0 & 1_m \otimes X_1 & \ldots & 1_m \otimes X_r \end{pmatrix} \in M_{m,(r+1)m}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$, y en consecuencia $p'(X_1,\ldots,X_r) \in M_{(r+1)m,m'}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$, de donde $m_2 = (r+1)m$. El proceso de factorizar se puede aplicar $d-1$ veces y se observa que $m_3 = (r+1)m_2 = (r+1)^2 m$, $\ldots$, $m_d = (r+1)m_{d-1} = (r+1)^{d-1} m$ y $m_{d+1} = m'$.*

De manera similar, $u_j = \begin{pmatrix} 1_{m_j} \otimes X_0 & 1_{m_j} \otimes X_1 \ldots 1_{m_j} \otimes X_r \end{pmatrix}$ si $j < d$ y $u_d = \left(\sum_{i_d=0}^{r} c(i_1,\ldots,i_d) \otimes X_i d \right)$.

Las polinomios $u_1,\ldots,u_{d-1}$ son prácticamente iguales, difieren únicamente en la dimensión de sus coeficientes, y ésta está determinada únicamente por el grado del polinomio p y por m. Por otro lado, el polinomio u_d rescata prácticamente toda la información sobre p.

Proposición 4.3. *Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra con uno $1_{\mathfrak{A}}$ y sean $d,m,m_1,\ldots,m_{d+1}$ enteros positivos tales que $m_1 = m = m_{d+1}$. Sea $\sum_{j=1}^{d} m_j$. Para cada $j \in \{1,\ldots,d\}$ considere una matriz $u_j \in M_{m_j,m_{j+1}}(\mathfrak{A})$ y observe que $u_1u_2\ldots u_d \in M_m(\mathfrak{A})$. Para cada $\lambda \in M_m(\mathfrak{A})$ defina la matriz $A(\lambda) \in M_k(\mathfrak{A})$ como*

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -u_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1_{m_2} & -u_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1_{m_3} & -u_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1_{m_{d-1}} & -u_{d-1} \\ -u_d & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1_{m_d} \end{pmatrix}.$$

Para cada $\lambda \in M_m(\mathbb{C})$ se tiene que

$$\lambda - u_1u_2\ldots u_d \text{ es invertible en } M_m(\mathfrak{A}) \iff A(\lambda) \text{ es invertible en } M_k(\mathfrak{A}),$$

y en tal caso

$$A(\lambda)^{-1} = B(\lambda) + C,$$

donde

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1_m \\ u_2u_3\ldots u_d \\ u_3u_4\ldots u_d \\ u_4\ldots u_d \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \left(\lambda - u_1u_2\ldots u_d\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1_m & u_1 & u_1u_2 & u_1u_2u_3 & \ldots & u_1u_2\ldots u_{d-1} \end{pmatrix}$$

y

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1_{m_2} & u_2 & u_2u_3 & u_2u_3u_4 & \ldots & u_2u_3\ldots u_{d-1} \\ 0 & 0 & 1_{m_3} & u_3 & u_3u_4 & \ldots & u_3u_4\ldots u_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1_{m_4} & u_4 & \ldots & u_4u_5\ldots u_{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1_{m_{d-1}} & u_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1_{m_d} \end{pmatrix}.$$

Observe que $(\lambda - u_1u_2\ldots u_d)^{-1}$ es el bloque corresponidente a la entrada $(1,1)$ de $A(\lambda)$.

Demostración. Empecemos por suponer que $A(\lambda)$ es invertible con inversa $F(\lambda)$ escrita en forma de bloque como $F(\lambda) = [f_{i,j}], 1 \leq i,j \leq d$ y $A(\lambda) = [a_{i,j}], 1 \leq i,j \leq d$ de acuerdo a la estructura de bloque descrita anteriormente.

De esta manera $1_k = A(\lambda)F(\lambda)$ y en particular se tiene que para cada $j = 1,\ldots,d$

$$\sum_{i=1}^{d} a_{i,j}f_{i,1} = \delta_{j,1},$$

donde

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1_{m_i} & \text{si } i = j, \\ 0_{m_i \times m_j} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Al multiplicar las distintas filas de $A(\lambda)$ por la primera columna de $F(\lambda)$ se obtiene para $j=1$

$$\lambda f_{1,1} - u_1 f_{2,1} = 1_{m_1}, \tag{9}$$

para $j = 2,\ldots,d-1$

$$f_{j,1} - u_j f_{j+1,1} = 0_{m_j \times m_1}, \tag{10}$$

y para $j = d$

$$-u_d f_{1,1} + f_{d,1} = 0_{m_d \times m_1}. \tag{11}$$

Utilizando (10) de manera recursiva

$$f_{2,1} = u_2 f_{3,1} = u_2 u_3 f_{4,1} = u_2 \ldots u_{d-1} f_{d,1},$$

y al sustituir con la expresión obtenida de 11 para $f_{d,1}$

$$f_{2,1} = u_2 u_3 \ldots u_d f_{1,1}.$$

Finalmente, de (9)

$$1_{m_1} = \lambda f_{1,1} - u_1(u_2 u_3 \ldots u_d f_{1,1}) = (\lambda - u_1 u_2 \ldots u_d) f_{1,1},$$

se concluye que $f_{1,1}$ tiene inverso izquiero y éste es $(\lambda - u_1 u_2 \ldots u_d)$.

Si ahora se considera el producto $F(\lambda)\cdot A(\lambda) = 1_k$ tiene que

$$\sum_{i=1}^{d} f_{1,i} a_{i,j} = \delta_{1,j}, \quad j = 1,\ldots,d$$

y por medio de un proceso similar al mostrado anteriormente

$$1_{m_1} = f_{1,1}(\lambda - u_1 u_2 \ldots u_d),$$

y con ello se concluye que el elemento es invertible y su inverso es la entrada correspondiente al bloque $(1,1)$ de la matriz $F(\lambda)$.

Supongamos ahora que $\lambda - u_1 u_2 \ldots u_d$ es invertible en $M_m(\mathfrak{A})$ y por ello la definición de la matriz $B(\lambda)$ es correcta. Veamos ahora que $A(\lambda)(B(\lambda)+C) = 1_k$.

$$A(\lambda)\begin{pmatrix} 1_m \\ u_2 u_3 \ldots u_d \\ u_3 u_4 \ldots u_d \\ u_4 \ldots u_d \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - u_1 u_2 \ldots u_d \\ u_2 u_3 \ldots u_d - u_2 u_3 \ldots u_d \\ u_3 u_4 \ldots u_d - u_3 u_4 \ldots u_d \\ \vdots \\ -u_d + u_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - u_1 u_2 \ldots u_d \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y de esta manera

$$A(\lambda)B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1_m \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_m & u_1 & u_1u_2 & \dots & u_1u_2u_3\dots u_{d-1} \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 1_m & u_1 & u_1u_2 & u_1u_2u_3 & \dots & u_1u_2\dots u_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que será necesario demostrar que

$$A(\lambda)C = \begin{pmatrix} 0 & -u_1 & -u_1u_2 & -u_1u_2u_3 & \dots & -u_1u_2\dots u_{d-1} \\ 0 & 1_{m_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1_{m_3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{m_4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1_{m_d} \end{pmatrix}$$

Comencemos por notar que la primera columna de C consiste únicamente de ceros, por lo que la primera columnna de $A(\lambda)C$ es de la misma forma. Como la segunda columna de C contiene ceros salvo en su segunda entrada, entonces la segunda columna de $A(\lambda)C$ coincide con la segunda columna de $A(\lambda)$. Analicemos ahora el resto de las entradas de la primera fila de $A(\lambda)C$. Para $j \in \{3,\dots,d\}$ la entrada correspondiente la posición $(1,d)$ es

$$[A(\lambda)C](1,j) = \begin{pmatrix} \lambda & -u_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2u_3\dots u_{j-1} \\ u_3u_4\dots u_{j-1} \\ \vdots \\ u_{j-1} \\ 1_{m_j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1u_2\dots u_{j-1} \end{pmatrix}.$$

La entrada correspondiente a la posición (i,j) para $i \in \{2,\ldots,d-1\}$ y $j \in \{3,\ldots,d\}$ es de la forma

$$[A(\lambda)C](i,j) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1_{m_i} & -u_i & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2u_3\ldots u_{j-1} \\ u_3u_4\ldots u_{j-1} \\ \vdots \\ u_{j-1} \\ 1_{m_j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que las primeras $i-1$ entradas de la i-ésima fila de $A(\lambda)$ son cero, en tanto que las primeras j entradas de la j-ésima columna de C son las únicas entradas potencialmente distintas de 0, así si $i > j$ entonces $[A(\lambda)C](i,j) = 0$. Como la i-ésima y j-ésima entradas de la correspondiente fila o columna es la identidad, entonces si $i = j$ se sigue que $[A(\lambda)C](i,j) = 1_{m_i}$. Finalmente, si $i \leq j-1$ entonces $[A(\lambda)C](i,j) = (u_iu_{i+1}u_{i+2}\ldots u_{j-1}) - u_i(u_{i+1}u_{i+2}\ldots u_{j-1}) = 0$.

Para terminar analizamos la última fila de $A(\lambda)C$. Si $j \in \{3,\ldots,d\}$, la entrada correspondiente a la posición (d,j) es de la forma

$$[A(\lambda)C](d,j) = \begin{pmatrix} -u_d & 0 & \ldots & 1_{m_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2u_3\ldots u_{j-1} \\ u_3u_4\ldots u_{j-1} \\ \vdots \\ u_{j-1} \\ 1_{m_j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

y ésto evidentemente es 1_{m_d} si $j = d$ y 0 si $j < d$. Con ello concluimos que $A(\lambda)(B(\lambda+C)) = 1_k$.

Para concluir con la prueba únicamente hay que verificar que $(B(\lambda)+C)A(\lambda) = 1_k$, y para ello se realiza un procedimiento muy similar al anterior. Primero se calcula el producto $B(\lambda)A(\lambda)$ multiplicando por cada uno de los factores que definen a $B(\lambda)$ y después se realiza la multiplicación $CA(\lambda)$ aprovechando que la estructura de $A(\lambda)$ y C facilitan los cálculos, justo como se mostró en el caso anterior. □

Corolario 4.3.1. *Sea p un polinomio en $M_m(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}\langle X_1,\ldots,x_r\rangle$ de grado d y sean $x_1,\ldots,x_r$ elementos en un álgebra unitaria $\mathfrak{A}$. Considere una factorización de p en polinomios de grado 1 como la propuesta en la Proposición 4.1,*

$$p = u_1u_2\ldots u_d.$$

Defina ahora $v_j = u_j(x_1,\ldots,x_r)$ para $j = 1,2,\ldots,d$ y sea $\lambda \in M_m(\mathbb{C})$. Entonces $\lambda \otimes 1_{\mathfrak{A}} - p(x_1,\ldots,x_r)$

es invertible en $M_m(\mathfrak{A})$ si y sólo si la matriz

$$A(\lambda, v_1, \ldots, v_d) = \begin{pmatrix} \lambda \otimes 1_n & -v_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1_{m_2} \otimes 1_n & -v_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1_{m_3} \otimes 1_n & -v_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1_{m_{d-1}} \otimes 1_n & -v_{d-1} \\ -v_d & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1_{m_d} \otimes 1_n \end{pmatrix},$$

es invertible en $M_k(\mathfrak{A})$.

Se utilizará este último corolario para dar una prueba del Truco de Linearización sin necesidad de recurrir a la teoría de las álgebras C*.

Corolario 4.3.2. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ álgebras* C* *unitarias y sean $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{A}_{sa}$, $y_1, \ldots, y_r \in \mathfrak{B}_{sa}$. Si para cada $m \in \mathbb{N}$ y para todo $a_0, a_1, \ldots, a_r \in M_m(\mathbb{C})_{sa}$ se tiene que*

$$\sigma(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_r a_i \otimes x_i) \supseteq \sigma(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_r a_i \otimes y_i), \tag{12}$$

entonces existe un homomorfismo- unitario*

$$\varphi : \mathrm{C}^*(1_{\mathfrak{A}}, x_1, \ldots, x_r) \to \mathrm{C}^*(1_{\mathfrak{B}}, y_1, \ldots, y_r),$$

tal que $\varphi(x_i) = y_i$ para cada $i = 1, \ldots, r$.

Demostración. La observación 3.3 verifica que si se satisface 12 entonces el enunciado también es válido si se sustituye con la hipótesis más general $a_0, a_1, \ldots, a_r \in M_m(\mathbb{C})$, es decir, para todo polinomio q de grado a lo más 1 en $M_m(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_r \rangle$ se tiene que

$$\sigma(q(x_1, \ldots, x_r)) \supseteq \sigma(q(y_1, \ldots, y_r)).$$

Sea $p \in \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_r \rangle$ un polinomio de grado $d \geq 1$ y utilizando la Proposición 4.1 con $m = 1$ considere una factorización en polinomios de grado 1

$$p = u_1 \ldots u_d.$$

Para cada $j = 1, \ldots, d$ se define

$$v_j = u_j(x_1, \ldots, x_r),$$

y

$$w_j = u_j(y_1, \ldots, y_r).$$

Entonces por 4.3.1 se tiene que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lambda 1_{\mathfrak{A}} - p(x_1, \ldots, x_r) \in \mathfrak{A}_{inv},$$

si y sólo si

$$A(\lambda, v_1, \ldots, v_r) \in M_k(\mathfrak{A})_{inv},$$

y similarmente

$$\lambda 1_{\mathfrak{B}} - p(y_1,\ldots,y_r) \in \mathfrak{B}_{inv},$$

si y sólo si

$$A(\lambda, w_1,\ldots,w_r) \in M_k(\mathfrak{B})_{inv}.$$

Definimos $q = A(\lambda, u_1,\ldots,u_d)$ y como cada u_i es un polinomio de grado 1 entonces $q \in M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$ también es de grado 1. Observe que $A(\lambda, v_1,\ldots,v_d) = q(x_1,\ldots,x_r)$ y $A(\lambda, w_1,\ldots,w_d) = q(y_1,\ldots,y_r)$, así que por hipótesis

$$\sigma(A(\lambda, v_1,\ldots,v_d)) \supseteq \sigma(A(\lambda, w_1,\ldots,w_d)),$$

en particular se tiene que si $A(\lambda, v_1,\ldots,v_d) \in M_k(\mathfrak{A})_{inv}$ entonces $A(\lambda, w_1,\ldots,w_d) \in M_k(\mathfrak{B})_{inv}$, es decir

$$\lambda 1_{\mathfrak{A}} - p(x_1,\ldots,x_r) \in \mathfrak{A}_{inv},$$

implica que

$$\lambda 1_{\mathfrak{B}} - p(y_1,\ldots,y_r) \in \mathfrak{B}_{inv},$$

y al considerar sus espectros

$$\sigma(p(x_1,\ldots,x_r)) \supseteq \sigma(p(y_1,\ldots,y_r)),$$

para todo polinomio $p \in \mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$. Utilizando la fórmula del radio espectral al polinomio autoadjunto p^*p se tiene que

$$\|p(x_1,\ldots,x_r)\|^2 \geq \|p(y_1,\ldots,y_r)\|^2.$$

Esta última desigualdad asegura que el homomorfismo-*

$$\varphi_0 : p(x_1,\ldots,x_r) \mapsto p(y_1,\ldots,y_r),$$

para cada $p \in \mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$, está bien definido y es acotado, por lo que se puede extender de manera continua a un único homomorfismo-* unitario $\varphi : \mathrm{C}^*(1_{\mathfrak{A}}, x_1,\ldots,x_r) \to \mathrm{C}^*(1_{\mathfrak{B}}, y_1,\ldots,y_r)$ tal que $\varphi(x_i) = y_i$ para cada $i = 1,\ldots,r$. □

Observe que los resultados previos a 4.3.2 no requieren que los elementos $x_i \in \mathfrak{A}$ y $y_i \in \mathfrak{B}$ sean autoadjuntos por lo que el corolario puede generalizarse a elementos normales si se hace una restricción sobre los polinomios $\mathbb{C}\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$, será necesario considerar polinomios en $2r$ variables no conmutativas de manera que para cada $i = 1,\ldots,r$ $x_i = X_i(x_i), X_{r+i}(x_i) = x_i^*$.

Corolario 4.3.3. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ álgebras C^* unitarias y sean $x_1,\ldots,x_r \in \mathfrak{A}$ y $y_1,\ldots,y_r \in \mathfrak{B}$ elementos normales. Si para cada $m \in \mathbb{N}$ y para todo $a_0, a_1,\ldots,a_r, b_1,\ldots,b_r \in M_m(\mathbb{C})_{sa}$ se tiene que*

$$\sigma(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_r a_i \otimes x_i + \sum_r b_i \otimes x_i^*) \supseteq \sigma(a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_r a_i \otimes y_i + \sum_r b_i \otimes y_i^*)$$

entonces existe un homomorfismo- unitario*

$$\varphi : \mathrm{C}^*(1_{\mathfrak{A}}, x_1,\ldots,x_r) \to \mathrm{C}^*(1_{\mathfrak{B}}, y_1,\ldots,y_r),$$

tal que $\varphi(x_i) = y_i$ para $i = 1,\ldots,r$.

Demostración. Puede seguirse la demostración del Corolario 4.3.2. Si $p = a_0 \otimes 1_{\mathfrak{A}} + \sum_r a_i \otimes x_i + \sum_r b_i \otimes x_i^*$ y $q = a_0 \otimes 1_{\mathfrak{B}} + \sum_r a_i \otimes y_i + \sum_r b_i \otimes y_i^*$ entonces p y q son normales y p^*p y q^*q son autoadjuntos. Si $\sigma(p) \supseteq \sigma(q)$ entonces se puede utilizar la Fórmula del Radio Espectral y en particular considerar los polinomios autoadjuntos p^*p y q^*q, por lo que

$$\|p\|^2 \geq \|q\|^2.$$

Ésto asegura que existe un morfismo unitario $\varphi : \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_r \rangle \to \mathbb{C}\langle y_1, \ldots, y_r \rangle$ tal que $\varphi(x_i) = y_i$, el hecho de que $X_{r+i}(x_i) = x_i^*$ asegura que el morfismo es involutivo y la desigualdad anterior confirma que éste está bien definido y es acotado, por lo que se extiende continuamente a un homomorfismo-* unitario

$$\varphi : \mathrm{C}^*(1_{\mathfrak{A}}, x_1, \ldots, x_r) \to \mathrm{C}^*(1_{\mathfrak{B}}, y_1, \ldots, y_r).$$

□

Referencias

[And78] Joel Anderson. "A C^*-algebra A for which Ext(A) is not a Group". En: *The Annals of Mathematics* 107.3 (mayo de 1978), pág. 455. ISSN: 0003-486X. DOI: 10.2307/1971124. URL: http://dx.doi.org/10.2307/1971124.

[BO12] Nathanial Patrick Brown y Narutaka Ozawa. *C*-algebras and finite-dimensional approximations*. Providence (R.I.): American Mathematical Society, 2012. ISBN: 978-1-4704-2118-2.

[CE76] Man-Duen Choi y Edward G Effros. "The completely positive lifting problem for C*-algebras". En: *Annals of Mathematics* (1976), págs. 585-609.

[Con85] Alain Connes. "Non-commutative differential geometry". En: *Publications Mathematiques de l'IHES* 62 (1985), págs. 41-144.

[Con97] John B. Conway. *A course in functional analysis*. 2nd ed. Graduate texts in mathematics 96. New York: Springer, 1997. ISBN: 9780387972459.

[Cun83] Joachim Cuntz. "K-theoretic amenability for discrete groups." En: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 1983.344 (1 de nov. de 1983), págs. 180-195. ISSN: 0075-4102, 1435-5345. DOI: 10.1515/crll.1983.344.180.

[Dav86] Kenneth R Davidson. "The distance between unitary orbits of normal operators". En: *Acta Sci. Math* 50 (1986), págs. 213-223.

[Haw15] Christopher Hawthorne. *A brief introduction to trace class operators*. Dic. de 2015. URL: https://cdchawthorne.com/writings/trace_class_operators.pdf.

[HST06] Uffe Haagerup, Hanne Schultz y Steen Thorbjørnsen. "A random matrix approach to the lack of projections in $C^*_{red}(F_2)$". En: *Advances in Mathematics* 204.1 (2006), págs. 1-83.

[HT05] Uffe Haagerup y Steen Thorbjørnsen. "A new application of random matrices: $Ext(C^*_{red}(F_2))$ is not a group". En: *Annals of Mathematics* 162.2 (sep. de 2005), págs. 711-775. DOI: 10.4007/annals.2005.162.711.

[KR97] Richard Kadison y John Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume I.* Vol. 15. Graduate Studies in Mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 22 de ago. de 1997. ISBN: 978-0-8218-0819-1. DOI: 10.1090/gsm/015. URL: http://www.ams.org/gsm/015.

[Lan83] E Christopher Lance. "K-theory for certain group C*-algebras". En: *Acta Mathematica* 151 (1983), págs. 209-230.

[Pau03] Vern Paulsen. *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*. Cambridge University Press, feb. de 2003. ISBN: 9780511546631. DOI: 10.1017/cbo9780511546631. URL: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511546631.

[PV82] Mihai Pimsner y Dan Voiculescu. "K-groups of reduced crossed products by free groups". En: *Journal of Operator Theory* (1982), págs. 131-156.