

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Una prueba del teorema de dualidad de Pontryagin

T E S I N A

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:

RAÚL RODRÍGUEZ BARRERA

DIRECTOR:

DR. FRANCISCO JAVIER TORRES AYALA
FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, ABRIL DE 2022

Índice general

Introducción **1**

1. Preliminares **3**

2. El teorema de dualidad de Pontryagin **9**
2.1. Representaciones de grupos topológicos compactos 9
2.2. El teorema de Peter-Weyl 14
2.3. Demostración del teorema de Pontryagin 22

Introducción

Este trabajo se divide en dos capítulos en los que se presenta toda la teoría necesaria para dar la demostración del teorema de dualidad de Pontryagin, dicho teorema nos da una caracterización del grupo dual de un grupo topológico Abeliano compacto o discreto, este teorema tiene consecuencias importantes pues se pueden estudiar propiedades algebraicas y topológicas del grupo a través de su grupo dual.

Cabe mencionar que asumiremos que el lector tiene conocimientos acerca de la medida de Haar (esta medida fue introducida por Alfred Haar, matemático húngaro). En concreto, una medida de Haar izquierda es una medida definida sobre los Borelianos de un grupo topológico localmente compactos y cumple con la propiedad de ser invariante bajo traslaciones izquierdas, es decir $\mu(xA) = \mu(A)$.

En el capítulo 1, utilizando la integral respecto a la medida de Haar izquierda, dotamos al espacio $\mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ con una operación binaria asociativa y distributiva con respecto a la suma, la cual se llama convolución, y mostramos algunas de sus propiedades. Posteriormente introducimos el operador $T_\phi(f) := \phi * f$. Concluimos este capítulo mostrando que dicho operador es un operador compacto en $\mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$, y bajo ciertas condiciones autoadjunto en $\mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$.

En el capítulo 2, definimos el concepto de representación, y estudiamos algunas propiedades que dichas representaciones cumplen. Con esto, y dado que el operador T_ϕ es compacto pasamos a dar la demostración del teorema de Peter-Weyl el cual es de gran importancia para abordar la demostración del teorema de de dualidad de Pontryagin con el que concluimos este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

Durante éste capítulo se asume que el lector cuenta con los resultados básicos sobre existencia y unicidad de la medida de Haar, y se inicia con el estudio de la convolución en grupos topológicos localmente compactos. Es importante mencionar que consideraremos la medida de Haar normalizada, es decir, siempre que el grupo topológico G sea compacto asumiremos que $\mu(G) = 1$.

Con esto en mente podemos definir los siguiente.

Definición 1.1. *Sea G un grupo topológico localmente compacto, sea μ la medida de Haar izquierda en G, y sean $f, g \in \mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu)$. Definimos la convolución de f y g como la función dada por*

$$(f * g)(t) = \begin{cases} \displaystyle\int f(s)g(s^{-1}t)d\mu(s) & \text{si } s \mapsto f(s)g(s^{-1}t) \text{ es integrable} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Consideramos importante mencionar algunas de las propiedades que la convolución cumple, sin embargo, hacemos énfasis en que en este trabajo no presentamos las demostraciones, si el lector desea revisar con detalle dichas pruebas, estas se pueden consultar en el capítulo 9 de [3].

Teorema 1.1. *Sea G un grupo topológico localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda en G y $f, g \in \mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu)$. Entonces*

a) $\displaystyle\int f(s)g(s^{-1}t)d\mu(s)$ *existe c.d. rel* $\mu(s)$

b) $||f * g||_1 \leqslant ||f||_1 ||g||_1$, *y por lo tanto* $f * g \in \mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu)$.

El teorema anterior muestra en su primer inciso que la convolución está bien definida, y de hecho se puede considerar simplemente como sigue

$$(f * g)(t) = \int f(s) g(s^{-1}t) d\mu(s)$$

observación 1.1. *Dado* G *un grupo topológico compacto,* [1] *como* $\mu(G) = 1$ *se sigue que*

$$||f||_1 \leqslant ||f||_2 \leqslant ||f||_\infty \ \forall f \in \mathcal{C}(G),$$

y de aquí

$$\mathcal{C}(G) \subset \mathcal{L}_\infty(G, \mathcal{B}(G), \mu) \subset \mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu) \subset \mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu).$$

Otra propiedad importante de la convolución es la siguiente.

Teorema 1.2. *Sea* G *un grupo topológico localmente compacto,* μ *una medida de Haar izquierda, si* $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ *son tales que* $f_1 = f_2$ *y* $g_1 = g_2$ *c.d. rel* μ, *entonces* $f_1 * g_1 = f_2 * g_2$.

Esto implica que la convolución está bien definida como función de clases de $\mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ (con la relación de equivalencia $f \sim g$ si $f = g$ *c.d. rel* μ), con esto estamos listos enunciar el siguiente el resultado.

Teorema 1.3. [2] *Sea* G *un grupo topológico localmente compacto,* μ *una medida de Haar izquierda y* $f, g, h \in \mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu)$. *Entonces se cumple que*

1. $(f * g) * h = f * (g * h)$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$
3. $(f + g) * h = f * h + g * h$
4. $\alpha(f * g) = (\alpha f * g) = f * (\alpha g)$
5. $||f * g||_1 \leqslant ||f||_1 ||g||_1$.

[1] Todo grupo compacto es localmente compacto por lo que la medida de Haar puede ser considerada sobre grupos compactos

[2] Cabe mencionar que con esto $\mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ con la suma usual, la convolución como producto y la norma $|| \cdot ||_1$ es un álgebra de Banach.

Teniendo en cuenta las propiedades que la convolución cumple pasamos ahora a definir el siguiente operador.

Definición 1.2. *Para* $\phi \in \mathcal{C}(G) := \{f : G \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ continua}\}$ *y cada* $f \in \mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu)$, *definimos el operador*

$$T_\phi : \mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu) \to \mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu), \ T_\phi(f) = \phi * f.$$

El siguiente teorema prueba que T_ϕ se puede definir como un operador de

$$\mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu) \text{ en } \mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu).$$

Teorema 1.4. *Sea* G *un grupo topológico compacto para*

$$f \in \mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu) \subset \mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu),$$

y $\phi \in \mathcal{C}(G)$ *el operador* $T_\phi(f) \in \mathcal{C}(G)$ y

$$||T_\phi(f)||_\infty \leqslant ||\phi||_\infty ||f||_1,$$

en particular el operador T_ϕ *es un operador acotado en* $\mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$.

Demostración. Dado que μ es una medida de Haar izquierda, se puede probar que si

$$f, g \in \mathcal{L}_1(G, \mathcal{B}(G), \mu)$$

en la definición de convolución podemos intercambiar el término $f(s)g(s^{-1}t)$ por $f(ts^{-1})g(s)$, de manera mas precisa, se tiene que:

$$(f * g)(t) = \int f(s)g(s^{-1}t)d\mu(s) = \int f(ts^{-1})g(s)d\mu(s).$$

Para la demostración del teorema utilizaremos la definición alternativa.
Por $\mathcal{N}_t$ denotamos al conjunto de vecindades abiertas alrededor de un elemento $t \in G$. Dado que ϕ es continua y G compacto se tiene que ϕ es uniformemente continua. Así, existe $U \in \mathcal{N}_e$ tal que $|\phi(t) - \phi(kt)| < \varepsilon$ para cada $t \in G$ y $k \in U$, luego, para cada $t_1, t_2 \in G$ tales que $t_2, t_1^{-1} \in U$ se sigue

que

$$\begin{aligned}
|T_\phi f(t_1) - T_\phi f(t_2)| &= \left| \int \phi(t_1 s^{-1}) f(s) d\mu(s) - \int \phi(t_2 s^{-1}) f(s) d\mu(s) \right| \\
&= \left| \int \Big(\phi(t_1 s^{-1}) f(s) - \phi(t_2 s^{-1}) f(s) \Big) d\mu(s) \right| \\
&= \left| \int \Big(\phi(t_1 s^{-1}) - \phi(t_2 s^{-1}) \Big) f(s) d\mu(s) \right| \\
&\leqslant \int \left| \Big(\phi(t_1 s^{-1}) - \phi(t_2 s^{-1}) \Big) \right| |f(s)| d\mu(s) \\
&= \int \left| \Big(\phi(\underbrace{t_1 s^{-1}}_{t}) - \phi(\underbrace{t_2 t_1^{-1}}_{k} \underbrace{t_1 s^{-1}}_{t}) \Big) \right| |f(s)| d\mu(s) \\
&< \varepsilon ||f||_1 \leqslant \varepsilon ||f||_2.
\end{aligned}$$

Así, $T_\phi(f) \in \mathcal{C}(G)$, más aún

$$||T_\phi(f)||_\infty = \sup_{t \in G} \left| \int \phi(ts^{-1}) f(s) d\mu(s) \right| \leqslant ||\phi||_\infty \int |f(s)| d\mu(s) = ||\phi||_\infty ||f||_1$$

por lo que el operador T_ϕ esta acotado en $\mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$, pues al ser G compacto:

$$\|T_\phi(f)\|_2 \leq \|T_\phi(f)\|_\infty, \ ||\phi||_\infty ||f||_1 \leqslant ||\phi||_\infty ||f||_2.$$

□

Para continuar debemos tener en cuenta la siguiente definición.

Definición 1.3. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, un operador T es un operador compacto si la imagen de la bola unitaria cerrada en $\mathcal{H}$ bajo T es un subconjunto compacto de $\mathcal{H}$.*

Antes de continuar, recordemos que el teorema de Arzela- Ascoli establece lo siguiente:

Teorema 1.5. ***(Arzela-Ascoli)*** *Sea X un compacto, $\mathcal{U} \subset X$ acotado y equicontinuo, entonces toda sucesión en $\mathcal{U}$ tiene una sub-sucesión convergente.*

Para finalizar este capítulo, mostraremos un resultado importante sobre el operador T_ϕ. Primero, recordemos que $\mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int f_1(x)\overline{f_2(x)}d\mu(x).$$

Teorema 1.6. *Sea G un grupo topológico compacto, μ una medida de Haar izquierda, y $\phi, f \in \mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$, entonces*

1. *El operador T_ϕ es un operador compacto en $\mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$.*
2. *Si $\phi(x^{-1}) = \overline{\phi(x)}$, el operador T_ϕ es auto-adjunto en $\mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$.*

Demostración. Dividiremos la prueba de la primera parte en dos casos.
Caso 1: Supongamos que ϕ es continua, sea

$$\mathcal{U} = \{T_\phi(f) \ : \ f \in \mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu), \ ||f||_2 \leqslant 1\}.$$

Por lo tanto, para demostrar que T_ϕ es compacto basta con demostrar que toda sucesión en $\mathcal{U}$ admite una sub-sucesión convergente. Notamos que por el *Teorema* 1.4 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}(G)$, entonces, según el teorema de Arzela- Ascoli basta con demostrar que $\mathcal{U}$ es acotado y equicontinuo en $(\mathcal{C}(G), ||\cdot||_\infty)$, esto pues $||f||_2 \leqslant ||f||_\infty$.

Sabemos por el *Teorema* 1.4 que T_ϕ es un operador acotado (con la norma $||\cdot||_2$), por lo que $\mathcal{U}$ es acotado. Por otro lado, veamos la equicontinuidad, dado que G es compacto se sigue que ϕ es uniformemente continua, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $V \in \mathcal{N}_e$ tal que $|\phi(kt) - \phi(t)| < \varepsilon$ para cada $t \in G$ y $k \in V$. Así, si $||f||_2 \leqslant 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} |(\phi * f)(kt) - (\phi * f)(t)| &= \left| \int \big(\phi(kts^{-1}) - \phi(ts^{-1})\big) f(s) d\mu(s) \right| \\ &\leqslant \int \big|\phi(kts^{-1}) - \phi(ts^{-1})\big| |f(s)| d\mu(s) \\ &< \varepsilon ||f||_1 \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

por lo que $\mathcal{U}$ es equicontinuo en $(\mathcal{C}(G), ||\cdot||_\infty)$.

Caso 2: Ahora, sea $\phi \in \mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ dado que $\mathcal{C}(G)$ es denso en $\mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ se tiene que existe una sucesión de funciones $\{\phi_n\} \subset \mathcal{C}(G)$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} ||\phi_n - \phi||_\infty = 0 \tag{1.1}$$

Por la primera parte tenemos que los operadores T_{ϕ_n} son compactos. Veamos que $\lim_{n\to\infty} T_{\phi_n} = T_\phi$ (con la norma de operador), para esto, tenemos que

$$\begin{aligned} ||T_{\phi_n}(f) - T_\phi(f)||_2 &= ||\phi_n * f - \phi * f||_2 \\ &= ||(\phi_n - \phi) * f||_2 \end{aligned}$$

pero, del *Teorema* 1.4 y la *Observación* 1.1 se sigue que

$$||(\phi_n - \phi) * f||_2 \leqslant ||(\phi_n - \phi) * f||_\infty \leqslant ||(\phi_n - \phi)||_\infty ||f||_1 \leqslant ||(\phi_n - \phi)||_\infty ||f||_2$$

así, de (1.1) y tomando supremo sobre $||f||_2 \leqslant 1$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} ||T_{\phi_n} - T_\phi|| \leq \lim_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi\| = 0$$

por lo que $\lim_{n\to\infty} T_{\phi_n} = T_\phi$ (con la norma de operador). Ya que el conjunto de operadores compactos es cerrado con la norma de operadores concluimos que T_ϕ es compacto.

Para la segunda parte, tenemos que

$$\langle T_\Phi(f_1), f_2\rangle = \int T_\phi(f_1)(t)\overline{f_2(t)}d\mu(t) = \int\int \phi(ts^{-1})f_1(s)\overline{f_2(t)}d\mu(t)d\mu(s).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \langle f_1, T_\phi(f_2)\rangle &= \int f_1(s)\overline{T_\phi(f_2)(s)}d\mu(s) \\ &= \int\int \overline{\phi(st^{-1})f_2(t)}f_1(s)d\mu(t)d\mu(s) \\ &= \int\int \overline{\phi(st^{-1})}f_1(s)\overline{f_2(t)}d\mu(t)d\mu(s) \end{aligned}$$

por lo que se da la igualdad aplicando la hipótesis con $x = st^{-1}$. □

Capítulo 2

El teorema de dualidad de Pontryagin

En este capítulo presentamos la prueba del teorema de dualidad de Pontryagin, antes de esto es necesario introducir el concepto de representaciones de grupos, los resultados sobre la teoría de representaciones sobre grupos compactos se prueban utilizando nuevamente la medida de Haar, por lo que es importante recalcar que en este trabajo asumiremos que dado un grupo topológico compacto G supondremos que $\mu(G) = 1$.

2.1. Representaciones de grupos topológicos compactos

Para comenzar damos la definición de representación.

Definición 2.1. *Definimos una representación de dimensión finita de un grupo topológico G como un homomorfismo continuo de grupos*

$$\Pi : G \to GL(V),$$

en donde V es un $\mathbb{C}-$ espacio vectorial de dimensión finita y $GL(V)$ denota el grupo de operadores lineales invertibles de V en V. En este caso diremos que (Π, V) es una representación de G sobre V.

De la definición, se sigue de manera inmediata la siguiente observación.

observación 2.1. *Es importante notar que la condición de continuidad implica que en cualquier base de V las entradas de la matriz $\Pi(g)$ son continuas para $g \in G$, es decir la función*

$$g \mapsto \Pi(g)v$$

es una función continua de G en V.

Definición 2.2. *Sea (Π, V)una representación, W subespacio de V, decimos que W es $G-$invariante (bajo Π) si para cada $g \in G$ y $w \in W$ se cumple que*

$$\Pi(g)w \in W.$$

Cabe mencionar que hay "distintos tipos" de representaciones, es importante tener en mente las siguientes.

Definición 2.3. *Decimos que una representación (Π, V) de G es irreducible si V no tiene subespacios $G-$invariantes (bajo Π) distintos de $\{0\}$ y V.*

Definición 2.4. *Una representación (Π, V) se dice que es unitaria si el operador $\Pi(g)$ es un operador unitario para cada $g \in G$. Ya que la representación de G es mediante operadores invertibles ésta es unitaria si*

$$\langle \Pi(g)v, \Pi(g)w \rangle = \langle v, w \rangle \quad \text{para cada } g \in G.$$

Aquí se da por hecho que el espacio vectorial cuenta con un producto interior

Ahora, para grupos topológicos compactos el siguiente teorema garantiza que siempre podemos suponer que sus representaciones de dimensión finita son unitarias.

Teorema 2.1. *Supongamos que G es un grupo topológico compacto y sea μ una medida de Haar izquierda. Sea (Π, V) una representación de dimensión finita de G sobre un espacio con producto interno $(V, \langle _, _ \rangle)$. Entonces V admite un producto interno tal que Π es unitaria.*

Demostración. Definimos un nuevo producto interior en V mediante

$$(v, w) = \int_G \langle \Pi(x)v, \Pi(x)w \rangle \, d\mu(x).$$

Como G es compacto, μ es finita y $x \mapsto \langle \Pi(x)v, \Pi(x)w \rangle$ es continua, la integral anterior converge para todo $v, w \in V$. Más aún, nuevamente dado

que G es compacto las medidas de Haar por la izquierda y por la derecha son iguales, luego

$$\begin{aligned}(\Pi(g)v, \Pi(g)w) &= \int \langle \Pi(xg)v, \Pi(xg)w\rangle \, d\mu(x) \\ &= \int \langle \Pi(x)v, \Pi(x)w\rangle \, d\mu(x) \\ &= (v, w)\end{aligned}$$

es decir (Π, V) es una representación unitaria respecto a este producto. $\square$

Por el teorema anterior podemos considerar toda representación de dimensión finita como unitaria.

Definición 2.5. *Si Π_1 y Π_2 son dos representaciones de dimensión finita de G sobre V_1, y V_2 entonces $\Pi_1 \oplus \Pi_2$ denota la representación sobre $V_1 \oplus V_2$ definida por*

$$(\Pi_1 \oplus \Pi_2)(g)(v_1, v_2) = (\Pi_1(g)v_1, \Pi_2(g)v_2)$$

Corolario 2.2. *Sea G un grupo topológico compacto, (Π, V) una representación de dimensión finita entonces (Π, V) es suma directa de representaciones irreducibles, en otras palabras*

$$V = \bigoplus_{k=1}^{n} V_k$$

con V_k subespacio $G-$invariante sobre los cuales (Π, V) es irreducible.

Demostración. Notemos que si (Π, V) es irreducible no hay nada que hacer. Supongamos entonces que es reducible, consideremos $(_, _)$ como en el teorema anterior y sea $U \neq \{0\}$ subespacio $G-$invariante de dimensión mínima, consideremos su complemento ortogonal $U^{\perp}$.

Afirmamos que $U^{\perp}$ es $G-$invariante, esto pues si $u \in U$, $u' \in U^{\perp}$ y $g \in G$ se tiene que

$$(\Pi(g)u', u) = (u', \Pi(g)^* u) = (u', \Pi(g)^{-1}u)$$

esto ultimo pues Π es unitaria, luego

$$(u', \Pi(g)^{-1}u) = (u', \Pi(g^{-1})u) = (u', u'')$$

con $u'' \in U$, esto pues U es $G-$invariante, así

$$(\Pi(g)u', u) = (u', u'') = 0,$$

es decir $\Pi(g)u' \in U^{\perp}$ para cada $g \in G$ y cada $u' \in U^{\perp}$.

Se sigue que $U^{\perp}$ es un subespacio $G-$invariante. Luego, repitiendo el argumento con $U^{\perp}$ e iterando obtenemos la descomposición requerida. □

Un resultado importante sobre representaciones es el siguiente.

Lema 2.1 (**de Schur parte 1**). *Supongamos que* (Π, V) *y* (Π', V') *son representaciones finito dimensionales irreducibles de un grupo compacto* G. *Si* $L : V \to V'$ *es lineal tal que* $\Pi'(g)L = L\Pi(g)$ *para cada* $g \in G$ *entonces* L *es inyectiva o* $L \equiv 0$.

Demostración. Si $L \equiv 0$ no hay nada que probar. Supongamos entonces que $L \neq 0$. Dado que $ker(L) \leqslant V$ si $w \in Ker(L)$ entonces

$$L\Pi(g)(w) = \Pi'(g)L(w) = 0.$$

Se sigue que $\Pi(g)w \in Ker(L)$ para todo $g \in G$ y $w \in Ker(L)$. Así $Ker(L)$ es $G-$invariante bajo Π, pero (Π, V) es irreducible, entonces $Ker(L) = \{0\}$ o $Ker(L) = V$, si $Ker(L) = V$, entonces $L \equiv 0$ lo cual es absurdo, por lo que $Ker(L) = \{0\}$ y así L es inyectiva. □

Lema 2.2 (**de Schur parte 2**). *Supongamos que* (Π, V) *es una representación finito dimensional e irreducible de un grupo compacto* G. *Si* $L : V \to V$ *es lineal tal que* $\Pi(g)L = L\Pi(g)$ *para cada* $g \in G$ *entonces* L *es múltiplo escalar de la identidad.*

Demostración. Sea $\lambda \neq 0$ un valor propio de L (el cual siempre existe pues estamos considerando $\mathbb{C}-$espacios vectoriales de dimension finita), sea $L' := L - \lambda Id$. Dado que λ es valor propio de L se sigue que $Ker(L') \neq 0$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Pi(g)L' &= \Pi(g)(L - \lambda Id) \\
&= \Pi(g)L - \lambda\Pi(g) \\
&= L\Pi(g) - \lambda\Pi(g) \\
&= (L - \lambda Id)\Pi(g) \\
&= L'\Pi(g)
\end{aligned}$$

como L' es lineal por el lema de Schur (parte 1) $L' \equiv 0$ pues $Ker(L') \neq 0$, luego $L = \lambda Id$. □

Definición 2.6. *Sea G un grupo topológico compacto, definimos un carácter sobre G como un homomorfismo continuo $\chi : G \to \mathbb{S}^1$, donde*

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

El siguiente corolario relaciona las representaciones irreducibles de dimensión finita y los caracteres.

Corolario 2.3. *Toda representación irreducible de dimensión finita de un grupo abeliano compacto G viene dada por un carácter.*

Demostración. Sea G un grupo abeliano compacto y (Π, V) una representación irreducible de dimensión finita. Notemos que para cada $g \in G$ tomando $L = \Pi(g)$, tenemos que para cada $g' \in G$

$$L\Pi(g')v = \Pi(g)\Pi(g')v = \Pi(gg')v = \Pi(g'g)v = \Pi(g')\Pi(g)v = \Pi(g')Lv$$

luego $L\Pi(g') = \Pi(g')L$. Más aún, L así definida es lineal, por lo que por el lema de Schur (parte 1) $\Pi(g)$ es un múltiplo escalar de la identidad para cada $g \in G$.

Por otro lado, sea W subespacio de V entonces

$$\Pi(g)w = \lambda Idw = \lambda w$$

para cada $w \in W$, y para cada $g \in G$ es decir, cada subespacio de V es $G-$invariante bajo Π, pero (Π, V) es irreducible por lo que todos los subespacios de V son unidimensionales, en particular V es unidimensional, sea $\{v\}$ base de V así, formando las correspondientes matrices de 1×1 obtenemos un carácter.

□

2.2. El teorema de Peter-Weyl

Antes de entrar a la prueba del teorema de Peter-Weyl veamos algunos resultados clásicos de análisis funcional.

Lema 2.3. *Sea $T : V \to V$ donde V es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial con producto interno. Si T es un operador auto adjunto entonces*

1. *Todos los valores propios de T son reales.*
2. *Para cualesquiera dos valores propios distintos de T, λ, μ sus espacios propios son ortogonales, es decir $H_\lambda \perp H_\mu$.*

Demostración. Para la primera parte, sea λ valor propio de T y $v \neq 0$ un vector propio. Como T es auto-adjunto tenemos que

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, Tv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle .$$

Así, $\lambda = \overline{\lambda}$, luego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para la segunda parte, si $\lambda \neq \mu$ son valores propios de T, $0 \neq v \in H_\lambda$ y $0 \neq w \in H_\mu$, entonces

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle .$$

Luego $\langle v, w \rangle = 0$, es decir $v \perp w$. □

A continuación enunciamos el teorema espectral para operadores compactos y auto-adjuntos. La prueba se puede consultar en [10] (teorema 6).

Teorema 2.4 (espectral). *Sea $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador compacto y auto-adjunto sobre un espacio de Hilbert. Entonces:*

1. *El conjunto de valores propios no nulos es contable.*
2. *Si el conjunto de valores propios es infinito, entonces lo podemos enumerar $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ de tal forma que*

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0.$$

3. *Para cada valor propio $\lambda \neq 0$, dim $H_\lambda < \infty$.*

4. $\mathcal{H} = ker\ T \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} H_\lambda$

Continuamos introduciendo la siguiente definición.

Definición 2.7. *Sea G un grupo y V un $K-$espacio vectorial, una $G-$acción lineal es una función $* : G \times V \to V$ que cumple lo siguiente, para cada $\sigma, \tau \in G$ $v, w \in V$ y $\lambda \in K$.*

1. $e * v = v$
2. $(\sigma\tau) * v = \sigma * (\tau * v)$
3. $\sigma * (v + w) = \sigma * v + \sigma * w$
4. $\sigma * (\lambda v) = \lambda(\sigma * v)$.

Lema 2.4. *La traslación derecha por σ, $(R(\sigma)f)(x) := f(x\sigma)$ en G induce una $G-$acción lineal en $\mathcal{C}(G)$ dada por*

$$(\sigma * f)(x) = (R(\sigma)f)(x).$$

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{C}(G)$, $\sigma, \tau \in G$ $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos que:

1. $(e * f)(x) = (R(e)f)(x) = f(xe) = f(x)$
2. $((\sigma\tau) * f)(x) = (R(\sigma\tau)f)(x) = f(x\sigma\tau) = R(\tau)f(x\sigma) = (\tau * f)(x\sigma)$
   $= R(\sigma)(\tau * f)(x) = (\sigma * (\tau * f))(x)$
3. $(\sigma * (f + g))(x) = R(\sigma)(f + g)(x) = (f + g)(x\sigma) = f(x\sigma) + g(x\sigma)$
   $= R(\sigma)f(x) + R(\sigma)g(x) = (\sigma * f)(x) + (\sigma * g)(x)$
4. $(\sigma * (\lambda f))(x) = R(\sigma)(\lambda f)(x) = \lambda f(x\sigma) = \lambda(R(\sigma)f)(x) = \lambda(\sigma * f)(x)$

□

Notamos que la traslación por la derecha también se extiende a las funciones en $\mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ pues si $f_1 = f_2$ c.d. relativa a μ entonces $R(\sigma)f_1 = R(\sigma)f_2$ c.d. relativa a μ.
Continuamos mostrando el siguiente lema.

Lema 2.5. *Supongamos que G es un grupo compacto, sea $\phi \in \mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ y $\sigma \in G$.*

1. *Para toda $f \in \mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ se cumple*

$$T_\phi(R(\sigma)f) = R(\sigma)T_\phi(f)$$

   es decir $R(\sigma)$ y T_ϕ conmuta.

2. *Si $\phi \in \mathcal{C}(G)$ y λ un valor propio del operador T_ϕ, entonces para cada $f \in H_\lambda$*

$$(T_\phi R(\sigma)f)(x) = \lambda(R(\sigma)f)(x)$$

   para toda $x \in G$.

Demostración. Para el inciso 1 tomamos $f \in \mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ y $x \in G$ para la cual $(T_\phi R(\sigma)f)(x)$ se calcule mediante una integral. Entonces

$$\begin{aligned}(T_\phi R(\sigma)f)(x) &= (\phi * R(\sigma)f)(x) \\ &= \int \phi(xh^{-1})(R(\sigma)f)(h)d\mu(h) \\ &= \int \phi(xh^{-1})f(h\sigma)d\mu(h).\end{aligned}$$

Tomando el cambio de variable $k = h\sigma$ y usando que las medidas de Haar izquierda y derecha coinciden tenemos

$$\begin{aligned}\int \phi(xh^{-1})f(h\sigma)d\mu(h) &= \int \phi(x(k\sigma^{-1})^{-1})f(k)d\mu(k) \\ &= \int \phi((x\sigma)k^{-1})f(k)d\mu(k) \\ &= (\phi * f)(x\sigma) \\ &= (R(\sigma)T_\phi(f))(x)\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba del primer inciso.

Para el inciso 2 supongamos que ϕ es continua y sea λ un valor propio del operador T_ϕ, $f \in H_\lambda$ y $\sigma \in G$,. Por el inciso 1 tenemos

$$T_\phi R(\sigma)f = R(\sigma)T_\phi f = R(\sigma)(\lambda f) = \lambda(R(\sigma)f)$$

pero ya que $\phi \in \mathcal{C}(G)$, $T_\phi R(\sigma)f$ es continua por lo tanto para toda $x \in H$

$$(T_\phi R(\sigma)f)(x) = \lambda(R(\sigma)f)(x)$$

lo cual termina la prueba del inciso 2. □

A continuación introduciremos otro concepto importante que juega el papel de las entradas de una matriz.

Definición 2.8. *Un coeficiente matricial de G asociado a una representación (Π, V) es una función de G en $\mathbb{C}$ la forma $g \mapsto L(\Pi(g)v)$ para algún $v \in V$, y $L \in V^*$.*

Antes de pasar a la prueba del teorema de Peter-Weyl, enunciaremos un teorema conocido que nos será de gran ayuda.

Teorema 2.5 (**Stone-Weierstrass**)**.** *Sea X un espacio topológico compacto, sea $V \subset \mathcal{C}(X)$ un subespacio cerrado bajo la suma puntual, producto y conjugación compleja, y que contiene a la función constante 1. Suponga que V separa puntos de X, es decir si $x_1, x_2 \in X$ $x_1 \neq x_2$, entonces existe $f \in V$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Entonces V es $||\cdot||_\infty-$ denso en $C(X)$.*

El siguiente lema ayudará a aplicar el Teorema de Stone-Weierstrass.

Lema 2.6. *Sea G un grupo compacto. Entonces el conjunto de coeficientes matriciales es una subálgebra de $\mathcal{C}(G)$ cerrada bajo conjugación y que no anula a los puntos de G.*

Demostración. Sean (Π_1, V_1) y (Π_2, V_2) dos representaciones y $L_1 \in V_1^*$, $L_2 \in V_2^*$, para la suma definimos la función denotada por

$$L_1 \oplus L_2(w_1, w_2) := L_1(w_1) + L_2(w_2)$$

la cual es un funcional lineal en $V_1 \oplus V_2$. Ahora, sean

$$F_1(g) = L_1(\Pi_1(g)v_1), \text{ y } F_2(g) = L_2(\Pi_2(g)v_2)$$

dos coeficientes matriciales, entonces para la suma tenemos:

$$\begin{aligned}(F_1 + F_2)(g) :&= L_1 \oplus L_2(\Pi_1(g) \oplus \Pi_2(g)(v_1, v_2)) \\ &= L_1 \oplus L_2(\Pi_1(g)v_1, \Pi_2(g)v_2) \\ &= L_1(\Pi_1(g)v_1) + L_2(\Pi_2(g)v_2)\end{aligned}$$

el cual es un coeficiente matricial asociado a la representación

$$(\Pi_1 \oplus \Pi_2, V_1 \oplus V_2),$$

$(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$ y $L_1 \oplus L_2 \in (V_1 \oplus V_2)^*$.

Para el producto, sean (Π_1, V_1) y (Π_2, V_2) dos representaciones de dimensión finita de G sobre V_1, y V_2 y $L_1 \in V_1^*$, $L_2 \in V_2^*$, la representación $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ denota la representación sobre $V_1 \otimes V_2$ definida por

$$(\Pi_1 \otimes \Pi_2)(g)(v_1 \otimes v_2) = (\Pi_1(g)v_1) \otimes (\Pi_2(g)v_2).$$

Por otro lado, definimos la función denotada por

$$L_1 \otimes L_2(w_1 \otimes w_2) := L_1(w_1)L_2(w_2)$$

la cual es un funcional lineal en $V_1 \otimes V_2$. Ahora, sean

$$F_1(g) = L_1(\Pi_1(g)v_1), \ y \ F_2(g) = L_2(\Pi_2(g)v_2)$$

dos coeficientes matriciales, para la función producto tenemos:

$$\begin{aligned}(F_1F_2)(g) :&= F_1(g)F_2(g) \\ &= L_1(\Pi_1(g)v_1)L_2(\Pi_2(g)v_2) \\ &= L_1 \otimes L_2((\Pi_1(g)v_1) \otimes (\Pi_2(g)v_2)) \\ &= L_1 \otimes L_2((\Pi_1(g) \otimes \Pi_2(g))(v_1 \otimes v_2)) \\ &= L_1 \otimes L_2((\Pi_1 \otimes \Pi)(g)(v_1 \otimes v_2))\end{aligned}$$

el cual es un coeficiente matricial asociado a la representación

$$(\Pi_1 \otimes \Pi_2, V_1 \otimes V_2),$$

$(v_1, v_2) \in V_1 \otimes V_2$ y $L_1 \otimes L_2 \in (V_1 \otimes V_2)^*$.

Para probar que los coeficientes matriciales son cerrados bajo la conjugación sea (Π, V) una representación de dimensión finita y $L \in V^*$. Ya que V es de dimensión finita podemos suponer que es espacio de Hilbert por lo que el Teorema de Representación de Riesz implica que existe $w \in V$ tal que $L(x) = \langle v, w\rangle$ para todo $x \in V$. Finalmente para el coeficiente matricial $F(g) = L(\Pi(g)v)$:

$$\begin{aligned}\overline{F(g)} &= \overline{L(\Pi(g)v)} \\ &= \overline{\langle \Pi(g)v, w\rangle} \\ &= \langle w, \Pi(g)v\rangle \\ &= \langle \Pi(g^{-1})w, v\rangle \\ &= \tilde{L}(\tilde{\Pi}(g)w)\end{aligned}$$

donde $\tilde{\Pi}$ es la representación de G en V dada por $\tilde{\Pi}(g) = \Pi(g^{-1})$ y $\tilde{L} \in V^*$ está dada por $\tilde{L}(x) = \langle x, v\rangle$.
Finalmente debemos de probar que los coeficientes matriciales no anulan los puntos de G. Dado $g_0 \in G$ sea (Π, V) una representación finito dimensional de G. Dado $v \in V$ unitario tenemos que $\Pi(g_0)v$ también es unitario por lo tanto existe $L \in V^*$ con $L(\Pi(g_0)v) = 1$. Tomando el coeficiente matricial $F(g) = L(\Pi(g)v)$ llegamos que $F(g) \neq 0$.

□

Con todo esto estamos listos para presentar la prueba del teorema de Peter-Weyl.

Teorema 2.6 (**Peter-Weyl**). *Sea G un grupo topológico compacto. Entonces los coeficientes matriciales de G son densos en $\mathcal{C}(G)$.*

Demostración. Primero demostramos que para todo $g \in G$, $g \neq e$, existe $\phi \in \mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ que satisface $\phi(h^{-1}) = \overline{\phi(h)}$ para el cual $R(g)$ no es la identidad en al menos un espacio propio asociado a un valor propio no nulo de T_ϕ.

Supongamos lo contrario; entonces hay un $g \in G$ tal que para cualquier ϕ que satisface $\phi(h^{-1}) = \overline{\phi(h)}$, $R(g)$ es la identidad en cada espacio propio de T_ϕ asociado a un valor propio no nulo. Por el *Teorema* 1.6 sabemos que T_ϕ es compacto y auto-adjunto, luego por el teorema espectral obtenemos

$$\mathcal{L}_2(G, \mathcal{B}(G), \mu) = ker\ T_\phi \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} H_\lambda$$

donde cada espacio propio H_λ es de dimensión finita. Así, dado que $R(g)$ es la identidad en cada H_λ se sigue que

$$Im(R(g) - Id) = (R(g) - Id)(ker\ T_\phi) \subset ker\ T_\phi$$

(esa ultima contención se da por el *Lema* 2.5). Entonces

$$T_\phi(R(g)f - f) = 0$$

Usando nuevamente el *Lema* 2.5 la igualdad anterior es equivalente a que para toda $x \in H$

$$R(g)(\phi * f)(x) = (\phi * f)(x). \tag{2.1}$$

A continuación mostraremos funciones f, ϕ para las cuales (2.1) no se cumple. Sea U una vecindad abierta de la identidad tal que $U = U^{-1}$ y $g \notin U^2$ (aquí usamos que G es Hausdorff [1]). Consideremos $\phi : G \to [0, 1]$, una función continua con soporte contenido en U tal que $\phi(e) = 1$. Tomamos $f = \phi$ así

$$\begin{aligned}(\phi * \phi)(e) &= \int \phi(h^{-1})\phi(h)d\mu(h) \\ &\geq \int \frac{1}{4}\chi_V(h)d\mu(h) \\ &= \frac{1}{4}\mu(V) > 0\end{aligned}$$

donde $V \subset U$ es una vecindad de e para la cual $V = V^{-1}$y $\phi(h) \geq \frac{1}{2}$ para toda $h \in V$.
Por otro lado

$$(\phi * \phi)(g) = \int \phi(gh^{-1})\phi(h)d\mu(h) = 0$$

pues si $\phi(gh^{-1})\phi(h) \neq 0$ se sigue que h y gh^{-1} están en el interior del soporte de ϕ luego $h \in U$ y $g \in Uh$ por lo que $g \in U^2$ lo cual es absurdo.
Luego

$$R(g)(\phi * f)(e) = (\phi * f)(g) \neq (\phi * f)(e)$$

[1]Dado que G es compacto se sigue que es localmente compacto, es decir su topología subyacente es localmente compacta y de Hausdorff

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, concluimos que para cualquier $g \in G \setminus \{e\}$ existe $\phi \in \mathcal{C}(G)$ tal que $R(g)$ no es la identidad en un espacio propio de dimensión finita H_λ de T_ϕ, con λ no nulo.

Sea $f \in H_\lambda$ para el cual $R(g)f \neq f$, entonces en particular existe $L \in H_\lambda^*$ tal que $L(R(g)f) \neq L(f)$. Ahora, tenemos que por el *Lema* 2.5 que

$$\begin{aligned} R : G &\to H_\lambda \\ g &\mapsto R(g) \end{aligned}$$

define una representación en G de dimensión finita (de hecho de la dimensión de H_λ), por lo tanto podemos considerar el coeficiente matricial

$$F(g) := L(R(g)f)$$

que por construcción satisface $F(g) \neq F(e)$. Sean $g_1, g_2 \in G$ distintos, dicho de otra manera, $g_1^{-1}g_2 \neq e$, por lo anterior para $g_1^{-1}g_2$ existe $\phi \in \mathcal{C}(G)$ tal que $R(g_1^{-1}g_2)$ no es la identidad en un espacio propio de dimensión finita H_λ de T_ϕ, con λ no nulo.

Sea $f \in H_\lambda$ para el cual $R(g_1^{-1}g_2)f \neq f$, luego $R^{-1}(g_1)(R(g_2)f) \neq f$ de aquí tenemos que $R(g_2)f \neq R(g_1)f$, entonces en particular existe $L \in H_\lambda^*$ tal que

$$L(R(g_2)f) \neq L(R(g_1)f)$$

es decir, $F(g_1) \neq F(g_2)$.

Luego, por el teorema de Stone-Weierstrass y el Lema 2.5 concluimos la prueba. □

Una consecuencia del teorema de Peter-Weyl es la siguiente.

Corolario 2.7. *Sea G un grupo compacto. Entonces para cada $g \neq e$, existe una representación irreducible (Π, V) de G tal que $\Pi(g) \neq Id$.*

Demostración. Por el Teorema de Peter-Weyl existe una representación finito dimensional (Φ, W), $L \in W^*$ y $w \in W$ tal que $F(g) \neq F(e)$, donde $F(x) = L(\Phi(x)w)$. Por *Corolario* 2.2 (Φ, W) es suma directa de representaciones irreducibles,

$$W = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i$$

donde para toda i, W_i es G-invariante bajo Φ y $(\Phi|_{W_i}, W_i)$ es irreducible. Denotamos $\Phi_i = \Phi|_{W_i}$.

Si $\Phi_i(g) = \Phi_i(e)$ para toda i entonces $\Phi(g) = \Phi(e)$ por lo que

$$F(w) = L(\Phi(g)w) = L(\Phi(e)w) = F(e),$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe i_0 para la cual

$$\Phi_{i_0}(g) \neq \Phi_{i_0}(e)$$

. Tomamos $\Pi = \Phi_{i_0}$. □

2.3. Demostración del teorema de Pontryagin

Hasta ahora hemos desarrollado toda la herramienta necesaria para demostrar el teorema de Pontryagin, pasemos ahora a dar paso a dicha prueba, para esto es necesario introducir el siguiente concepto.

Definición 2.9. *Sea G un grupo topológico localmente compacto, definimos*

$$\hat{G} := \{\chi \in HOM(G, \mathbb{S}^1) \ : \ \chi \text{ continua}\}.$$

De la definición se sigue lo siguiente

observación 2.2. *$\hat{G}$ dotado con la operación $(\chi\psi)(g) = \chi(g)\psi(g)$ es un grupo Abeliano con neutro $\chi(g) = 1$ para cada $g \in G$ e inverso*

$$\chi^{-1}(g) = \overline{\chi(g)}$$

para cada $g \in G$, dicho grupo se conoce como el grupo de caracteres de G o el grupo dual de G.

A continuación dotaremos a $\hat{G}$ con estructura de grupo topológico localmente compacto, para esto necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.10. *Sea G un grupo topológico localmente compacto, dado $F \subset G$ compacto y $\varepsilon > 0$ definimos*

$$P(F, \varepsilon) := \{\chi \in \hat{G} \ : \ \text{para todo } x \in F, \ |\chi(x) - 1| < \varepsilon\} \subseteq \hat{G}.$$

Antes de mostrar la importancia de estos conjuntos necesitamos el siguiente lema, cabe mencionar que en este trabajo omitiremos la prueba, sin embargo si el lector lo desea puede consultar dicha prueba en [1] (*Teorema* 4.5 página 18).

Lema 2.7. *Sea G un grupo y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de G tal que se cumple lo siguiente:*

1. *La propiedad de intersección finita*
2. *para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ con $V^2 \subset U$*
3. *para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ con $V^{-1} \subset U$*
4. *para todo $U \in \mathcal{U}$, para todo $x \in U$ existe $V \in \mathcal{U}$ con $xV \subset U$*
5. *para todo $U \in \mathcal{U}$, para todo $x \in U$ existe $V \in \mathcal{U}$ con $xVx^{-1} \subset U$ si además*
6. *para todo $U, V \in \mathcal{U}$ existe $W \in \mathcal{U}$ con $W \subset U \cap V$.*

Entonces las familias $\{x\mathcal{U}\}_{U\in\mathcal{U}}$ y $\{\mathcal{U}x\}_{U\in\mathcal{U}}$ son bases de vecindades de x que dotan a G con estructura de grupo topológico.

Con esto estamos listos para mostrar la importancia de dichos conjuntos.

Teorema 2.8. *La familia de conjuntos*

$$\mathcal{U} := \{P(F, \varepsilon) \ : \ F \subset G \text{ compacto}, \ \varepsilon > 0\}$$

forman una base de vecindades para el carácter 1 *con la cual se le da a $\hat{G}$ con estructura de grupo topológico.*

Demostración. Veamos que $\hat{G}$ es un grupo topológico, para esto veamos que la familia de conjuntos

$$\mathcal{U} := \{P(F, \varepsilon) \ : \ F \subset G \text{ compacto}, \ \varepsilon > 0\}$$

satisfacen las premisas del lema anterior.

1. Notemos que $\chi_1 \in \bigcap_{i=1}^{n} P(F_i, \varepsilon_i)$ para toda familia finita.

2. Sea $P(F,\varepsilon) \in \mathcal{U}$, notemos que $P(F,\frac{\varepsilon}{2})^2 \subset P(F,\varepsilon)$, esto pues si $\chi\psi \in P(F,\frac{\varepsilon}{2})^2$ entonces :

$$\begin{aligned}\forall x \in F\ |\chi(x)\psi(x)-1| &\leqslant |\chi(x)\psi(x)-\psi(x)|+|\psi(x)-1| \\ &= |(\chi(x)-1)\psi(x)|+|\psi(x)-1| \\ &= |(\chi(x)-1)||\psi(x)|+|\psi(x)-1| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

por lo que $\chi\psi \in P(F,\varepsilon)$.

3. Sea $P(F,\varepsilon) \in \mathcal{U}$, notemos que $P(F,\varepsilon)^{-1} \subset P(F,\varepsilon)$, esto pues si $\chi \in P(F,\varepsilon)^{-1}$ entonces $\chi^{-1} \in P(F,\varepsilon)$, luego $\forall x \in F\ |1-\overline{\chi(x)}| < \varepsilon$ se sigue que $|\chi(x)||1-\overline{\chi(x)}| < \varepsilon$, luego $|\chi(x)-\chi(x)\overline{\chi(x)}| < \varepsilon$, es decir $|\chi(x)-1| < \varepsilon$, así $\chi \in P(F,\varepsilon)$.

4. Sea $F \subset G$ compacto y $\chi \in P(F,\varepsilon)$ continua, luego

$$\max_{\chi\in F}\{|\chi(x)-1|\} < \varepsilon.$$

Sea

$$\alpha := \max_{\chi\in F}\{|\chi(x)-1|\}$$

así $\varepsilon-\alpha>0$, consideremos $P(F,\varepsilon-\alpha)$ afirmamos que $\forall\chi \in P(F,\varepsilon)$ se tiene que

$$\chi P(F,\varepsilon-\alpha) \subset P(F,\varepsilon)$$

esto pues si $\chi\psi \in \chi P(F,\varepsilon-\alpha)$ entonces

$$\begin{aligned}\forall x \in F\ |\chi(x)\psi(x)-1| &\leqslant |\chi(x)\psi(x)-\psi(x)|+|\psi(x)-1| \\ &= |(\chi(x)-1)|+|\psi(x)-1| < \alpha+\varepsilon-\alpha=\varepsilon.\end{aligned}$$

5. Se sigue de manera clara pues $\hat{G}$ es Abeliano.

6. Notemos que dadas $P(F,\varepsilon), P(F',\varepsilon') \in \mathcal{U}$ se cumple que

$$P(F\cup F', \text{mín}\{\varepsilon,\varepsilon'\}) \subset P(F,\varepsilon)\cap P(F,\varepsilon')$$

con esto dotamos a $\hat{G}$ con estructura de grupo topológico compacto.

□

Para completar la prueba de que el dual es nuevamente un grupo topológico resta probar que es localmente compacto. La demostración de esta parte se encuentran en [1] (*Teorema* 23.15 página 361) y sólo la enunciamos para referencia.

Teorema 2.9. *Dado un grupo topológico localmente compacto, su grupo dual dotado con la topología inducida por los subconjuntos definidos en el Teorema* 2.8 *es localmente compacto.*

Antes de continuar con el siguiente teorema mostraremos el siguiente lema.

Lema 2.8. *Sea G un grupo compacto no necesariamente Abeliano, y sea $\chi \in \hat{G}$, $\chi \neq \chi_1$ entonces*

$$\int \chi d\mu = 0.$$

Demostración. Sea $g \in G$, tenemos que

$$\int \chi(x) d\mu(x) = \int \chi(gx) d\mu(x) = \chi(g) \int \chi(x) d\mu(x)$$

dado que $\chi \neq 1$ se concluye. □

Haciendo uso del lema anterior podemos demostrar que para grupos Abelianos el único subgrupo de $\hat{G}$ que separa los puntos de G es el total.

Teorema 2.10. *Sea G un grupo compacto Abeliano y sea Y subgrupo de $\hat{G}$ tal que para cada $a \neq e$ en G hay un carácter $\chi \in Y$ tal que $\chi(a) \neq 1$. Entonces $Y = \hat{G}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{L}$ el espacio lineal de todas las funciones complejas en G de la forma $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{k_j}$ con $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ y $\chi_{k_1}, \ldots, \chi_{k_2} \in Y$ dado que $Y \leqslant \hat{G}$ se tiene que $\mathcal{L}$ contiene a la función constante 1 y es cerrado bajo conjugación compleja, además por hipótesis si $a, b \in G$ $a \neq b$ entonces existe $\chi \in Y$ tal que $\chi(ab^{-1}) \neq 1$ y así $\chi(a) \neq \chi(b)$ por lo que $\mathcal{L}$ separa puntos de G. Luego, por el teorema de Stone-Weierstrass $\mathcal{L}$ es denso en $\mathcal{C}(G)$. Para finalizar procedemos por contradicción. Supongamos que hay un carácter continuo ψ de G tal que $\psi \notin Y$, por la densidad de $\mathcal{L}$ hay una función $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_j \in \mathcal{L}$ tal que

$$||\psi - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_j|| < \frac{1}{2}$$

así

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\geqslant \int_G \left|\psi - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_j\right|^2 d\mu \\
&= \int_G \psi\overline{\psi} d\mu - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_G \chi_j \overline{\psi} d\mu - \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_j} \int_G \overline{\chi_j}\psi d\mu + \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} \alpha_j \overline{\alpha_r} \int_G \chi_j \overline{\chi_r} d\mu \\
&= \int_G |\psi|^2 d\mu + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \overline{\alpha_r} \int_G \chi_j \overline{\chi_j} d\mu
\end{aligned}$$

esta ultima igualdad se da por el *Lema* 2.8, luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\geqslant \int_G 1 d\mu + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \overline{\alpha_j} \int_G \chi_{k_j} \overline{\chi_{k_j}} d\mu \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|^2 \int_G |\chi_{k_j}|^2 d\mu \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|^2 \geqslant 1
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo, así concluimos la prueba. □

Teorema 2.11. *Sea G un grupo topológico localmente compacto Abeliano, $H \leqslant G$ y $a \in G \setminus H$ entonces existe $\chi \in \hat{G}$ tal que $\chi(H) = 1$ y $\chi(a) \neq 1$.*

Demostración. Consideremos el grupo cociente G/H. Con la topología inducida por el mapeo cociente $p : G \to G/H$ el grupo G/H es localmente compacto (*Teorema* 5.22 *en* [1], página 38). Ya que G es Abeliano G/H también lo es. Por lo tanto toda representación irreducible de G/H viene dada por un carácter (*Corolario* 2.3). Ya que $a \notin H$, $p(a) \neq e_{G/H}$ y por el *Corolario* 2.7 existe un carácter $\tilde{\chi} : G/H \to \mathbb{S}^1$ con $\tilde{\chi}(p(a)) \neq 1$. Tomando $\chi := \tilde{\chi} \circ p$ obtenemos el carácter que buscamos. □

Para demostrar el teorema de Pontryagin es necesario introducir la siguiente función.

Definición 2.11. *Definimos la función* $\tau : G \to \hat{\hat{G}}$ *dada por* $g \mapsto \tau_g$ *con* $\tau_g(\chi) := \chi(g)$.

Esta función cumple con varias propiedades, entre ellas es necesario mostrar la siguiente.

Teorema 2.12. *El mapeo* τ *es un isomorfismo continuo de* G *en* $\tau(G) \leqslant \hat{\hat{G}}$

Demostración. Primero veamos que en efecto τ_g es un carácter en $\hat{G}$, sean $\chi, \psi \in \hat{G}$ entonces tenemos que

$$\tau_g(\chi\psi) = (\chi\psi)(g) = \chi(g)\psi(g) = \tau_g(\chi)\tau_g(\psi),$$

para la continuidad de τ_g notemos que si $\chi\psi^{-1} \in P(\{g\}, \varepsilon)$ entonces por definición de la topología en $\hat{G}$ se cumple que $|\tau_g(\chi) - \tau_g(\psi)| < \varepsilon$. Así, en efecto τ_g es un carácter en $\hat{G}$. Por otro lado, para la inyectividad dado que los caracteres separan puntos esto por *Corolario* 2.7 se sigue que existe $\chi_0 \in \hat{G}$ tal que si $g_1, g_2 \in G$ con $g_1 \neq g_2$ entonces $\chi_0(g_1) \neq \chi_0(g_2)$ dicho de otra manera, si $g_1, g_2 \in G$ con $g_1 \neq g_2$ entonces $\tau_{g_1}(\chi_0) \neq \tau_{g_2}(\chi)$.

Veamos ahora que τ es un morfismo de grupos, dados $g_1, g_2 \in G$, $\chi \in \hat{G}$ con tenemos que

$$\tau_{g_1 g_2}(\chi) = \chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2) = \tau_{g_1}(\chi)\tau_{g_2}(\chi).$$

Para concluir, veamos que τ es continuo, para esto basta probar que τ es continuo en e. Consideremos $\Gamma \subset \hat{G}$ y $\varepsilon > 0$, sea U vecindad de $e \in G$ tal que $\overline{U}$ compacto (esto se puede pues G es localmente compacto), consideremos la vecindad $P(\overline{U}, \frac{\varepsilon}{2})$ de $1 \in \hat{G}$. Dado que Γ es compacto y $\{\chi P(\overline{U}, \frac{\varepsilon}{2})\}_{\chi \in \Gamma}$ es una cubierta de Γ podemos extraer una subcubierta finita, digamos

$$\chi_1 P(\overline{U}, \tfrac{\varepsilon}{2}), \ldots, \chi_m P(\overline{U}, \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Sea V una vecindad de $e \in G$ tal que para todo $x \in V$ y todo $j = 1, \ldots, m$

$$V \subset U \text{ y } |\chi_j(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, si $x \in V \subset G$ y $\chi \in \Gamma$ entonces $|\chi_j(x) - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todo j y dado que $\chi \in \Gamma$ existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\chi \in \chi_j P(\overline{U}, \dfrac{\varepsilon}{2})$ por lo que

$$|\chi(x) - \chi_j(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para algún j, luego

$$|\chi(x) - 1| \leqslant |\chi(x) - \chi_j(x)| + |\chi_j(x) - 1| < \varepsilon$$

es decir $|\tau_x(\chi) - 1| < \varepsilon$ para cada $\chi \in \Gamma$. Por lo que τ es continuo. □

El siguiente teorema nos da una relación entre G y $\hat{G}$.

Teorema 2.13. *Si G es compacto, entonces $\hat{G}$ es discreto; y si G es discreto entonces $\hat{G}$ es compacto.*

Demostración. Los detalles de la demostración se pueden consultar en [1]. (*Teorema* 23.17, página 362) □

Finalmente, con todo esto estamos listos para demostrar el teorema de Pontryagin.

Teorema 2.14 (**Dualidad de Pontryagin**). *Sea G un grupo topológico Abeliano (compacto o discreto) entonces*

$$\tau : G \to \hat{\hat{G}},\ g \mapsto \tau_g(\chi) := \chi(g)$$

es un isomorfismo de grupos topológicos.

Demostración. Por el *Teorema* 2.12 lo único que resta probar es que

$$\tau(G) = \hat{\hat{G}}.$$

Dividiremos la demostración en dos casos.

Caso 1: G es discreto. Por el *Teorema* 2.13, $\Gamma := \hat{G}$ es compacto y por el *Teorema* 2.12 $\tau(G)$ es un subgrupo de $\hat{\Gamma} = \hat{\hat{G}}$. Teniendo en consideración el *Teorema* 2.10 para probar que $\tau(G) = \hat{\Gamma}$ es suficiente probar que $\tau(G)$ separa los puntos de Γ, pero dado $\chi \in \Gamma$ no trivial existe $g \in G$ con $\chi(g) \neq 1$

es decir $\tau_g(\chi) \neq 1$.

Caso 2: G compacto. Por el $Teorema$ 2.13 tenemos que $\hat{G}$ es discreto, nuevamente por el $Teorema$ 2.13 tenemos que $\hat{\hat{G}}$ es compacto.
Supongamos que $\tau(G) \lneq \hat{\hat{G}}$, entonces por el $Teorema$ 2.11 existe $\Phi \in \hat{\hat{\hat{G}}}$ tal que $\Phi(\tau(G)) = 1$ y $\Phi \neq 1$. Por otro lado, dado que $\hat{\hat{G}}$ es compacto nuevamente por el $Teorema$ 2.13 tenemos que $\hat{\hat{\hat{G}}}$ es discreto y así por el caso anterior $\Phi \in \hat{\hat{\hat{G}}} = \tau(\hat{G})$, es decir existe $\chi \in \hat{G}$ tal que $\Phi = \tau_\chi$. Luego dado que $\Phi(\tau(G)) = 1$ se sigue que $\tau_\chi(\tau(G)) = 1$ así $\tau_\chi(\tau_g) = 1$ para toda $g \in G$, así $\chi(g) = 1$ para toda $g \in G$ es decir $\chi = 1$ por lo que $\Phi = \tau_\chi = 1$ lo cual es absurdo, luego $\tau(G) = \hat{\hat{G}}$. □

Bibliografía

[1] Hewitt, E.,Ross, A. (1979). *Abstract Harmonic Analysis 1.* New York: Springer Verlag, 2nd ed.

[2] Knapp, A. (n.d.) *Advanced Real Analysis.* East Setauket, New York: Cornell University Library.

[3] Cohn, D. (2013). *Measure theory.* New York: Birkhäuser/Springer,2nd ed.

[4] Wang, Z. (2001) *Peter-Weyl theorem and its applications.* http://staff.ustc.edu.cn/wangzuoq/Courses/13F-Lie/Notes/Lec%2023-24.pdf , Accessed: 2022-02-11.

[5] Douglas, R. (1998). *Banach Algebra Techniques in Operator Theory.* New York: Springer New York ,2nd ed.

[6] Stein, E.(1970). *Topics in harmonic analysis, related to the Littlewood-Paley theory.* Annals of mathematics studies, no. 63, Princeton University Press, New Jersey

[7] Lim, D. (2013). *The Peter-Weyl theorem.* https://tqft.net/web/teaching/2014/Analysis3/Assignments/Essay/Example2 .pdf, Accessed: 2022-02-11.

[8] Folland, G. (2015). *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. CRC Press., USA, ,2nd ed.

[9] Morris, S. (1977). *Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups* . Cambridge: Cambridge University Press.

[10] Terence T. (2011)*254a, notes 3: Haar measure and the peter-weyl theo- rem*. http://terrytao.wordpress.com/2011/09/27/254a-notes-3-haar-measure-and- the-peter-weyl-theorem , Accessed: 2022-04-31.