

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ENCAJES CUADRÁTICOS DE GRÁFICAS : UNA INTRODUCCIÓN

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
SHEILA KEREN PALACIOS ALVARADO

DIRECTOR DE LA TESINA:
DR. FRANCISCO JAVIER TORRES AYALA
FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO DEL 2020

Índice general

Introducción **1**

1. Preliminares **2**
1.1. Sobre Gráficas 2
1.2. Sobre Espacios de Hilbert y su asociación con las Gráficas 3

2. Encajes Cuadráticos **5**
2.1. Conociéndolos 5
2.2. Ejemplos: 9
2.2.1. Trayectorias 9
2.2.2. Gráficas Completas 10
2.3. ¿Cómo Calcular la Constante de Encaje Cuadrático? 11

3. Preservando la Clase EC **13**
3.1. Subgráficas 13
3.2. Operaciones de Gráficas que Preservan la Clase EC 14
3.2.1. Producto Cartesiano 14
3.2.2. Producto Estrella 16
3.2.3. Producto Ortogonal 18
3.2.4. El Borrado de Aristas 19

Introducción

Desde sus inicios la teoría de gráficas ha sido un campo fértil que ha visto germinar de sus entrañas, desde problemas intrigantes y de díficil solución (como la conjetura/teorema de los cuatro colores), hasta nuevas maneras de entender la vida y la complejidad (como la teoría de redes). Como una casa con muchos recovecos, en cada rincón pueden hallarse muchas subáreas distintas, algunas siendo el terreno de la intersección entre la teoría de gráficas y otras áreas de la matemática como lo son el álgebra o el análisis matemático.

Entre los muchos vástagos de esta área, surge un concepto particular, muy relacionado con el álgebra lineal y a escala infinita, con el análisis funcional; este concepto, llamado *encajes cuadráticos de gráficas* intuitivamente proviene de querer encajar en un espacio con cierta métrica y nociones de ortogonalidad y geometría, en general un espacio de Hilbert, una gráfica, respetando si bien no de manera isométrica, pero sí preservando hasta cierto punto la noción de distancia que aporta la métrica usual entre gráficas que suele ser determinada por la longitud de la trayectoria más corta entre dos vértices.
De alguna manera, se quiere poder *trazar* dicha gráfica en ese espacio, donde las nociones de *geometría* existentes, dan la posibilidad de considerar los vértices de la gráfica como parte de un arreglo de puntos, en un espacio de dimensión cercana al orden de esa gráfica, donde la distancia entre dos de los puntos de ese arreglo, usualmente una geodésica en ese espacio, al elevarse al cuadrado coincida con la distancia entre dos vértices de esa gráfica.

La noción formal de esta idea, por supuesto, se irá abordando a lo largo de las páginas de este trabajo, gran parte del cual se basa en [7], puesto que se ha tratado de profundizar y detallar algunas pruebas y ejemplos incluidos en él; además de complementar con otros ejemplos y teoremas que se considera son necesarios para presentar un texto autocontenido respecto al tema.

En alusión al contenido del presente, después de un breve apartado de preliminares, con las definiciones básicas de teoría de gráficas que aparecen a lo largo del texto, se introducirán los conceptos necesarios de espacios de Hilbert y encajes, para poder formalizar la noción de *encaje cuadrático de una gráfica*, desde la perspectiva de dichos espacios. Después de analizar algunos ejemplos, se procederá a explicar un método para calcular la *constante de encaje cuadrático* de una gráfica, mediante la técnica de multiplicadores de Lagrange.

Para contribuir a la familiarización con los conceptos introducidos, se añadirán ejemplos de gráficas populares que sí admiten un encaje cuadrático en un espacio de Hilbert de cierta dimensión, en algunos casos, incluyendo el cálculo de la *constante de encaje cuadrático* de dicha gráfica

Por último, se abordarán algunas de los operaciones de gráficas más conocidas y se analizará, si estas operaciones y productos preservan la *clase de encaje cuadrático* de la o las gráficas con las que se operó inicialmente. En algunos casos más especiales, se podrá determinar de manera explícita la *constante de encaje cuadrático* de la gráfica resultante de algún producto entre gráficas o la aplicación de alguna de las operaciones.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sobre Gráficas

Será necesario recordar las siguientes definiciones:

Definición 1.1: Una **gráfica** G se define como una pareja ordenada $G = (V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto no vacío, cuyos elementos se nombran como **vértices** y $E(G)$ es el conjunto

$$E(G) = \{\{u, v\} | u, v \in V(G)\},$$

si la pareja $\{u, v\}$ pertenece a $E(G)$ se dice que u y v son adyacentes, a los elementos de $V(G)$ también se les conoce como **aristas**. Es importante notar que $\{u, v\} = \{v, u\}$, puesto que son conjuntos de dos elementos y no parejas ordenadas.

Definición 1.2: Si la cardinalidad de $V(G)$ es **finita** se dice que G es finita y se denomina **infinita** en caso contrario.

Definición 1.3: Si G es una gráfica finita, a $|V(G)|$ se le conoce como el **orden** de G y se denota $n(G)$. De ser finita, a la cardinalidad de $E(G)$ se le conoce como el **tamaño** de G y se denota por $m(G)$.

Un objeto importante a considerar se da en la siguiente

Definición 1.4: Dada una gráfica $G = (V(G), E(G))$ se dice que $H = (V(H), E(H))$ es una **subgráfica** de G si $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$.

Definición 1.5: Dada una gráfica $G = (V(G), E(G))$ y $E_0 \subset E(G)$, se define la gráfica $G \setminus E_0$, como aquella cuyo conjunto de vértices es $V(G)$ y el de aristas es $E(G) \setminus E_0$, es decir, la obtenida de la gráfica original G **borrando** las aristas en E_0.

Definición 1.6: En este texto, dada una gráfica $G = (V(G), E(G))$ y $H = (V(H), E(H))$ una subgráfica de G, se define la gráfica $G \setminus H$, como aquella que tiene a $V(G)$ como conjunto de vértices, y a $E(G) \setminus E(H)$ como conjunto de aristas. Es decir, la obtenida de G al borrar las aristas de H.

Definición 1.7: Dado v_0 en $V(G)$, se define $deg(v_0)$ como la cardinalidad del conjunto $\{\{u, v_0\} | u \in V(G)\}$.

El siguiente, también llamado Teorema de Euler, permite delinear la relación entre los grados de los vértices de una gráfica y el tamaño de esta.

Teorema 1.1 [1] La suma de los grados de los vértices de una gráfica es igual a dos veces su número de aristas.

Demostración: Cada arista $\{u, v\}$ en $E(G)$, es contabilizada dos veces en la suma de los grados de los vértices. Por lo que al considerar todas las aristas, como cada una aporta un 2 a la suma, se tiene que $2m = \sum_{v \in V(G)} deg(v)$.□

Por su parte:

Definición 1.8: Una **uv-trayectoria** consiste en una sucesión de vértices $v_1...v_n$, en la que para toda i en $\{1,...,n-1\}$, $\{v_i, v_{i+1}\}$ es arista de G.
Como gráfica, se define la **trayectoria de orden** n, denotada P_n como aquella gráfica para la que existe una numeración de sus vértices $\{v_1,...,v_n\}$ tal que $deg(v_1) = deg(v_n) = 1$ y $deg(v_i) = 2$ para todo $2 \leq i \leq n-1$, con v_i y v_{i+1} adyacentes para todo i en $\{1,...,n-1\}$.

La definición de trayectoria permite introducir la noción de conexidad:

Definición 1.9: Se dice que una gráfica G es **conexa**, si para cualesquiera u, v vértices de la G existe una uv-trayectoria que los conecta.

Otras definiciones de conceptos que se emplearán en este trabajo:

Definición 1.10: Un **ciclo** es una trayectoria $v_1...v_n$ en la cual el vértice inicial y final coinciden, es decir $v_1 = v_n$.

Definición 1.11: Se dice que una gráfica es **acíclica** si no contiene ningún ciclo como subgráfica.

Definición 1.12: Un **árbol** es una gráfica conexa y acíclica.

Definición 1.13: Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la gráfica **completa** de orden n, denotada K_n como la gráfica en la que todos sus vértices son adyacentes a aquellos distintos de ellos.

Definición 1.14 Dada G una gráfica, un **clan** es una subgráfica completa de G.

Definición 1.15 Una gráfica **bipartita** es aquella cuyo conjunto de vértices puede partirse en dos conjuntos A y B tales que $A \cap B = \emptyset$ y si u, v en $V(G)$ están ambos en A o ambos en B, $\{u, v\}$ no pertenece a $E(G)$. Si además todo elemento de A es adyacente a todo elemento de B, entonces se dice que G es **bipartita completa** y se denota $K_{|A|,|B|}$.

Es importante hacer hincapie en el hecho de que en este texto se estará hablando exclusivamente de gráficas conexas. Porque es en este tipo de gráficas que se puede definir la noción de distancia, como se verá a continuación:

Definición 1.16: Para una gráfica conexa definimos la **distancia** entre dos vértices $d(u, v)$ como la longitud de la trayectoria más corta entre u y v.

Con estas definiciones previamente establecidas, es posible asociar una matriz a una gráfica dada, esto se logra considerando una matriz cuadrada, a la que a cada columna y renglón asociamos un elemento de $V(G)$. En particular, una que puede considerarse es la llamada matriz de distancia, que definimos como sigue:

Definición 1.17: La **matriz de distancia** es una matriz cuadrada con n renglones y columnas, donde n es el orden de G. Su entrada uv-ésima es la distancia entre los vértices u y v, es decir, la matriz de distancia D es

$$D_{(uv)} = d(u, v).$$

Una observación inmediata es que esta matriz es simétrica, pues dados u, v en $V(G)$ se tiene que

$$d(u, v) = d(v, u).$$

1.2. Sobre Espacios de Hilbert y su asociación con las Gráficas

Dado que se estará trabajando constantemente con las nociones de norma y producto interior, incluimos las siguientes:

Definición 1.18 [3] Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una **norma** en V es una función $\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

- $\|u - v\| = 0$ si y sólo si $u = v$.
- $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ para cualesquiera v en V, λ en $\mathbb{R}$.
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para cualesquiera u, v en V.

Un espacio vectorial que posee una norma, se denomina normado.

Definición 1.19 [3] Dado V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ un **producto interior(escalar)** en V es una función $\langle ., . \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, con las siguientes propiedades:

- $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$ para cualesquiera λ, μ en $\mathbb{R}$ y u, v, w en V.
- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ para cualesquiera u, v en V.
- $\langle v, v \rangle > 0$ para todo v en V con $v \neq 0$.

Apreciados por sus similitudes con algunas propiedades de los espacios euclídeos, los Espacios de Hilbert se definen a continuación:

Definición 1.20 Un **espacio de Hilbert** es un espacio normado completo cuya norma tiene la particularidad de provenir de un producto interior $\langle ., . \rangle$.

Hay una relación estrecha entre estos espacios y las gráficas (finitas o infinitas).

Dada una gráfica G, es posible asociarle un espacio de Hilbert, un ejemplo particular, consiste en asociarle el espacio $C_0(V)$ que son las funciones real valuadas con soporte finito en V.
Considerando este espacio, la matriz de distancia D asociada a G puede verse como un operador en dicho espacio de Hilbert.

Es precisamente esta asociación y algunos resultados derivados de ella, lo que se estudiará con más detalle en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Encajes Cuadráticos

2.1. Conociéndolos

Según Thomassen en [9] :

"Una gráfica G es encajada en el espacio topológico X si G es representada en X de tal manera que los vértices de G son elementos distintos de X y una arista en G es un arco simple que conecta sus dos extremos de tal manera que ningún par de aristas se intersecan, salvo quizá en un extremo común."

Un poco distinta a la noción de encaje topológico, que refleja el párrafo anterior, se tiene la que se menciona en [4]:

"Dada una gráfica $G = (V(G), E(G))$ y una variedad $M \subset \mathbb{R}^k$, una función $x : G \longrightarrow M$ es un encaje de G en M si:

- x manda $V(G)$ a un conjunto de n puntos;
- x lleva a $E(G)$ a un conjunto de arcos simples (i.e. imágenes homeomorfas de $[0, 1]$ en M);
- para cada $\{u, v\}$ en $E(G)$, los extremos del arco simple x_{uv} son x_u y x_v."

Aunque guardan ciertas similitudes, la segunda noción relaja la necesidad de que los arcos no tengan intersecciones.

Dado un espacio de Hilbert H y G una gráfica, no necesariamente finita, se define:

Definición 2.1 [7] Una función φ de $V(G)$ en H con norma $||\cdot||$, es llamado un **encaje cuadrático** de G si para cualesquiera u, v en $V(G)$ se tiene que:

$$||\varphi(u) - \varphi(v)||^2 = d(u, v).$$

La definición anterior, se enfoca más en encajar el espacio métrico que surge de G y su distancia: $(V(G), d)$, en un espacio de Hilbert. Es importante recordar que el encaje va de $V(G)$ a H, por lo que, no se está considerando una función de $E(G)$ a H. Sin embargo, en el caso finito, la definición 2.1 podría relacionarse con la noción en [4], puesto que, existiendo un encaje cuadrático de G a un determinado espacio, dados u y v en $V(G)$ adyacentes en G, es posible considerar la recta $tu + (1 - t)v$ con t en $[0, 1]$ como uno de los arcos simples que representa a la arista $\{u, v\}$ de G.

También

Definición 2.2 Se dice que G pertenece a la **clase EC de gráficas**, si existe un encaje cuadrático de G a un espacio de Hilbert.

Se verá a lo largo de este trabajo que esta clase es no vacía, en particular para n dada, K_n y P_n pertenecen a ella (Ver ejemplos 2.2.1 y 2.2.2)

Resta ahora una pregunta importante: ¿Qué criterios se pueden utilizar para saber si una gráfica pertenece a esta clase?
Con miras a responder esta pregunta, se dan algunas definiciones:

Definición 2.3 [7] La **constante de encaje cuadrático** o **constante EC** de una gráfica, denotada **CEC(G)** se obtiene de la ecuación

$$CEC(G) = sup\left\{\langle f, Df\rangle | f \in C_0(V), \langle f, f\rangle = 1, \langle \mathbf{1}, f\rangle = 0\right\}.$$

Donde $\mathbf{1}$ denota a la función constante 1 en V, perteneciente a $C_0(V)$ cuando V es finita. Si V es finita, $C_0(V)$ es un espacio de dimensión finita, por lo que la condición $\langle f, f\rangle = 1$, asegura que nos encontramos en una esfera en un conjunto de dimensión finita, por lo que dicha esfera es compacta. Además, la condición $\langle \mathbf{1}, f\rangle = 0$ representa a un hiperplano; al intersectar este plano con esa esfera, tenemos un conjunto compacto, por lo que:

$$CEC(G) = max\left\{\langle f, Df\rangle | f \in C_0(V), \langle f, f\rangle = 1, \langle \mathbf{1}, f\rangle = 0\right\}.$$

Es pertinente realizar en este punto una observación para no perder de vista el espacio en el que se estará trabajando.

Observación: $Df = \sum_{u\in V} D_{(uv)}f(v) = \sum_{u\in V} d(u,v)f(v)$ no necesariamente está en $C_0(V)$ pero sí en $C(V)$, que son las funciones con valores reales sobre los vértices de G, pues en cada entrada es la suma de una cantidad finita de reales.

Ahora es posible dar la siguiente:

Definición 2.4: Dado un espacio métrico X, una matriz simétrica K en $X \times X$ es considerada **condicionalmente negativa definida** si para f en $C_0(X)$, tal que $\langle \mathbf{1}, f\rangle = 0$, se tiene que $\langle f, Kf\rangle$ es no positiva [7]. De allí que pueda decirse que D es condicionalmente negativa definida si y sólo si $CEC(G) \leq 0$.

En respuesta a la pregunta, un criterio a considerar es el dado por el siguiente teorema, cabe mencionar que un resultado similar al teorema 2.1 fue probado por Schoenberg en [8] aunque con un enfoque distinto. Como contexto, se generalizará la definición 2.1.

Definición 2.5 Si (X, d) es un espacio métrico y H un espacio de Hilbert con norma $||\cdot||$, la función $\varphi : X \longrightarrow H$ es un encaje cuadrático, si para cualesquiera x, y en X

$$||\varphi(x) - \varphi(y)||^2 = d(x, y).$$

Teorema 2.1 Para un espacio métrico (X, d) las siguientes dos condiciones son equivalentes:

- el espacio métrico (X, d) admite un encaje cuadrático;
- la matriz de distancia D, indexada sobre los elementos de X, definida como: $D_{xy} = d(x, y)$, es negativa definida.

Adaptado al contexto, se tiene el siguiente teorema, cuya prueba se anexa por completez y claridad. La prueba que se presenta está basada en una dada por el Dr. Francisco Torres, asesor de este trabajo:

Teorema 2.2 Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica con matriz de distancia $D_{(uv)} = d(u, v)$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- G es de clase EC;
- D es condicionalmente negativa definida;
- $CEC(G) \leq 0$.

Demostración: De la definición de matriz condicionalmente negativa definida es claro que D es condicionalmente negativa definida si y sólamente si $CEC(G) \leq 0$.

Por lo que en realidad, únicamente hace falta probar que G es de clase EC si y sólo si $CEC(G) \leq 0$.

Primeramente, supongase que G es de clase EC.

Sea f en $C_0(V(G))$ con $\langle 1, f \rangle = 0$.

Entonces:

$$\langle f, Df \rangle = \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v) f(u) f(v),$$

pero G es de clase EC, por lo que hay un encaje $\varphi : V \longrightarrow H$ tal que $d(u,v) = ||\varphi(u) - \varphi(v)||^2$, luego:

$$\langle f, Df \rangle = \sum_{u,v \in V(G)} ||\varphi(u) - \varphi(v)||^2 f(u) f(v)$$

$$= \sum_{u,v \in V(G)} f(u) f(v) \Big[||\varphi(u)||^2 - \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle - \langle \varphi(v), \varphi(u) \rangle + ||\varphi(v)||^2 \Big]$$

$$= \Big(\sum_{u \in V(G)} f(u) ||\varphi(u)||^2 \Big) \Big(\sum_{v \in V(G)} f(v) \Big) - \Big\langle \sum_{u \in V(G)} f(u)\varphi(u), \sum_{v \in V(G)} f(v)\varphi(v) \Big\rangle$$

$$- \Big\langle \sum_{v \in V(G)} f(v)\varphi(v), \sum_{u \in V(G)} f(u)\varphi(u) \Big\rangle + \Big(\sum_{v \in V(G)} f(v) ||\varphi(v)||^2 \Big) \Big(\sum_{u \in V(G)} f(u) \Big)$$

Pero como $\langle \mathbf{1}, f \rangle = 0$ entonces $\Big(\sum_{w \in V(G)} f(w) \Big) = 0$, además u y v son cualesquiera vértices en $V(G)$, por lo que: $\sum_{u \in V(G)} f(u)\varphi(u) = \sum_{v \in V(G)} f(v)\varphi(v)$.

Así, lo anterior se convierte en

$$0 - \Big\langle \sum_{u \in V(G)} f(u)\varphi(u), \sum_{u \in V(G)} f(u)\varphi(u) \Big\rangle - \Big\langle \sum_{v \in V(G)} f(v)\varphi(v), \sum_{v \in V(G)} f(v)\varphi(v) \Big\rangle + 0,$$

se tiene entonces que

$$\langle f, Df \rangle = 0 - \Big|\Big| \sum_{u \in V(G)} f(u) f(u) \Big|\Big|^2 - \Big|\Big| \sum_{v \in V(G)} f(v) f(v) \Big|\Big|^2 \leq 0.$$

Por lo cual $CEC(G) \leq 0$.

Ahora, habrá que suponer que $CEC(G) \leq 0$, por lo que $\langle f, Df \rangle \leq 0$, para todo f en $C_0(V)$ con $\langle \mathbf{1}, f \rangle = 0$.

Se define $K = \{f \in C_0(V) | \langle \mathbf{1}, f \rangle = 0\}$. Se construirá un encaje en un cociente de K.

Puesto que dados f, g en K y λ en $\mathbb{R}$, se cumple que

$$\langle \mathbf{1}, \lambda f + g \rangle = \langle \mathbf{1}, \lambda f \rangle + \langle \mathbf{1}, g \rangle = \lambda \langle \mathbf{1}, f \rangle + \langle \mathbf{1}, g \rangle = \lambda 0 + 0 = 0.$$

Entonces K es un subespacio de $C_0(V)$.

Se define también, para f, g en K, la función

$$\langle f, g \rangle_D = -\langle f, Dg \rangle.$$

Dados f, g en K y λ en $\mathbb{R}$, obsérvese que:

- $\langle \lambda f + g, h \rangle_D = -\langle \lambda f + g, Dh \rangle = -\langle \lambda f, Dh \rangle - \langle g, Dh \rangle = -\lambda \langle f, Dh \rangle - \langle g, Dh \rangle = \lambda \langle f, h \rangle_D + \langle g, h \rangle_D$.
- Usando que D es simétrica, se tiene que $\langle f, g \rangle_D = \langle g, f \rangle_D$.
- Como f pertenece a K, se cumple la hipótesis, luego:

$$\langle f, f \rangle_D = -\langle f, Df \rangle \geq 0.$$

Si f es la función cero, entonces $\langle f, f \rangle_D = -\langle f, Df \rangle = 0$.

Para poder obtener un producto interior, se necesitará trabajar sobre un cociente, para lo cual se define al conjunto $N = \{n \in K | \langle n, Dn \rangle = 0\}$.

Para f en K se define $||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle_D}$, con lo que $|| \cdot ||$ así definida es una seminorma.

Luego n está en N si y solámente si $||n|| = 0$.

Ahora se probará que N es un subespacio vectorial.

Puesto que si n y m pertencen a N y η es un real

$$\langle \eta n + m, \eta n + m \rangle_D = -\langle \eta n + m, D(\eta n + m) \rangle = -\langle \eta n, \eta Dn \rangle - \langle m, \eta Dn \rangle - \langle \eta n, Dm \rangle - \langle m, Dm \rangle;$$

El primer y último sumando se hacen cero por pertenecer n, m a N, y por Cauchy-Schwarz para seminormas, se tiene que

$$-\langle m, \eta Dn \rangle = \langle m, \eta n \rangle_D \leq ||m||||\eta n|| = |\eta|||m||||n|| = 0,$$

y de manera análoga $-\langle \eta n, Dm \rangle = 0$.

Por lo que $\langle \eta n + m, \eta n + m \rangle_D = 0$, de lo cual $\eta n + m$ está en N, luego N es un subespacio de K.

Ahora, considerese como H la completación del espacio cociente normado $(K/N, ||.||_{K/N})$, donde $||.||_{K/N}$ es la norma usual del espacio cociente, definida como:

$$||[f]||_{K/N} = \inf_{n \in N} \{||f + n||\}.$$

Para ver que esta norma viene del producto interior siguiente

$$\langle [f], [g] \rangle = \langle f, g \rangle_D.$$

hay que ver primero que este está bien definido.

Sean f, g en K y n, m en N.

$$\langle f + n, g + m \rangle = -\langle f + n, D(g + m) \rangle = -\langle f + n, Dg + Dm \rangle = -\langle f + n, Dg + Dm \rangle$$
$$= -\langle f, Dg \rangle - \langle n, Dg \rangle - \langle f, Dm \rangle - \langle n, Dm \rangle.$$

Pero n y m pertenecen a N, luego:

- $0 \leq |\langle n, Dg \rangle| \leq ||n||||Dg|| = 0.$
- $0 \leq |\langle n, Dm \rangle| \leq ||n||||Dm|| = 0.$
- $0 \leq |\langle f, Dm \rangle| \leq ||f||||Dm|| = 0.$

Por lo cual :

$$\langle f+n, g+m\rangle_D = -\langle f, Dg\rangle = \langle f, g\rangle_D.$$

Por lo que en efecto, está bien definido, y por ende la norma en cuestión lo está. Hay que hacer notar, que si G es finita K será de dimensión finita, por lo que K/N será un espacio completo.

Ahora dado u_0 en $V(G)$ fijo se define el encaje φ, como $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\delta_u - \delta_{u_0}]$ para u en $V(G)$.

Como

$$\langle \mathbf{1}, \delta_u - \delta_{u_0}\rangle = 0,$$

entonces φ pertence a K y

$$||\varphi(u) - \varphi(v)||^2 = ||\tfrac{1}{\sqrt{2}}[\delta_u - \delta_{u_0}] - \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\delta_v - \delta_{u_0}]||^2$$
$$= ||\tfrac{1}{\sqrt{2}}[\delta_u - \delta_v]||^2 = \tfrac{1}{2}||\delta_u - \delta_v||^2 = \tfrac{1}{2}\inf_{n\in N}||\delta_u - \delta_v + n||^2.$$

Pero

$$||\delta_u - \delta_v + n|| = \langle \delta_u - \delta_v + n, \delta_u - \delta_v + n\rangle_D$$
$$= \langle \delta_u, \delta_u\rangle_D - \langle \delta_u, \delta_v\rangle_D + \langle \delta_u, n\rangle_D - \langle \delta_v, \delta_u\rangle_D$$
$$+\langle \delta_v, \delta_v\rangle_D - \langle \delta_v, n\rangle_D + \langle n, \delta_u\rangle_D - \langle n, \delta_v\rangle_D + \langle n, n\rangle_D.$$

Como n está en N, entonces $\langle \delta_u, n\rangle_D = \langle \delta_v, n\rangle_D = \langle n, \delta_u\rangle_D = \langle n, \delta_v\rangle_D + \langle n, n\rangle_D = 0$, se sigue que

$$||\delta_u - \delta_v + n|| = \langle \delta_u, \delta_u\rangle_D - \langle \delta_u, \delta_v\rangle_D - \langle \delta_v, \delta_u\rangle_D + \langle \delta_v, \delta_v\rangle_D.$$

Y se tiene que

$$\langle \delta_u, \delta_v\rangle_D = -\langle \delta_u, D\delta_v\rangle = -D_{(uv)} = -d(u, v).$$

Luego

$$\langle \delta_u, \delta_u\rangle_D = 0 \text{ y } \langle \delta_v, \delta_v\rangle_D = 0.$$

De lo cual

$$||\delta_u - \delta_v + n||^2 = 2d(u, v).$$

Por lo que

$$||\varphi(u) - \varphi(v)||^2 = d(u, v).$$

Y φ es un encaje cuadrático, lo que concluye la prueba. □

2.2. Ejemplos:

Utilizando el teorema 2.2 es conveniente dar ejemplos de gráficas que admiten un encaje cuadrático. Los siguientes ejemplos analizan gráficas bien conocidas.

2.2.1. Trayectorias

Figura 2.1: P_4

Este tipo de gráficas fueron mencionadas al inicio, para poder hablar de la noción de conexidad.
Para las trayectorias, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.3 Para cualquier $n \geq 1$ la trayectoria P_n de n vértices es de clase EC.

Demostración: Sea $P_n = (v_1, v_2, ..., v_n)$, donde v_i está a distancia $i - j$ de v_j y sea H un espacio de Hilbert de dimensión $n - 1$.

Considerese la función $\varphi : V \longrightarrow H$ con $\varphi(v_1) = \hat{0}$ y para $2 \leq i \leq n$, $\varphi(v_i) = e_1 + e_2 + ... + e_{i-1}$, luego dados v_l y v_m, l, m en $\mathbb{N}$, supongase sin pérdida de generalidad que $l \geq m$, entonces, si $m \neq 1$

$$||\varphi(l) - \varphi(m)||^2 = ||e_1 + ... + e_{l-1} - e_1 - ... - e_{m-1}||^2 = ||e_m + ... + e_{l-1}||^2.$$

Por el teorema de Pitágoras generalizado:

$$||e_m||^2 + ... + ||e_{l-1}||^2 = 1 + .. + 1 = l - m = d(v_l, v_m).$$

Si $m = 1$

$$||\varphi(l) - \varphi(m)||^2 = ||e_1 + ... + e_l - \hat{0}||^2 = ||e_1 + ... + e_l||^2$$
$$= ||e_1||^2 + ... + ||e_{l-1}||^2 = 1 + .. + 1 = l - 1 = d(v_1, v_l).$$

Por lo tanto, φ es un encaje cuadrático en un espacio de Hilbert. □

2.2.2. Gráficas Completas

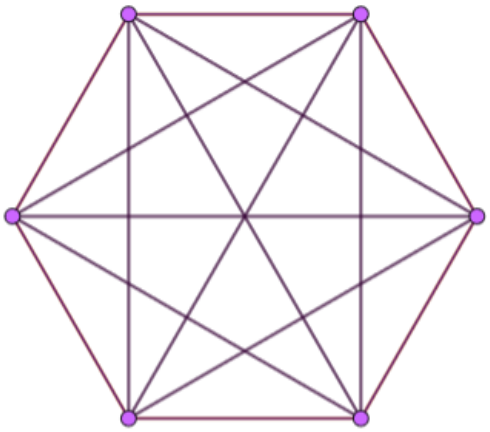


Figura 2.2: K_6

Teorema 2.4 [7] Para cualquier n en $\mathbb{N}$, K_n es de clase EC.

Demostración: Se considera el conjunto de vértices $V(K_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, como K_n es completa, la distancia entre cualesquiera dos vértices en $V(G)$ es 1. Por lo que todas las entradas de D son 1, excepto las diagonales que son cero.

Dada f en $C_0(V)$, tal que $f(v_i) = x_i$ para $1 \leq i \leq n$ se tiene que:

$$\langle f, D(K_n)f \rangle = \sum_{i \neq j} d(v_i, v_j) f(v_i) f(v_j) = \sum_{i \neq j} x_i x_j = \sum_{i,j=1} x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \langle \mathbf{1}, f \rangle^2 - ||f||^2.$$

Si $n \geq 2$, al ser f tal que $< 1, f >= 0$ y $||f|| = 1$, se tiene que $CEC(K_n) = -1$.
Si $n = 1$ se define $CEC(K_1) = 0$. □

2.3. ¿Cómo Calcular la Constante de Encaje Cuadrático?

Se ha definido la constante de encaje cuadrático de una gráfica e incluso se ha calculado de manera explícita en el ejemplo de K_n, a continuación se explicará detalladamente como calcular esta constante en gráficas finitas utilizando la técnica de multiplicadores de Lagrange. [7]

Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica, con $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ con $n \geq 3$.
Si para f en $C(V)$, se tiene que $f(v_i) = x_i$, es posible identificar a f con el vector columna $[x_1, x_2, ..., x_n]^T$ en $\mathbb{R}^n$.

Recuerdese que:

$$CEC(G) = max\left\{\langle f, Df\rangle | f \in C_0(V), \langle f, f\rangle = 1, \langle \mathbf{1}, f\rangle = 0\right\}.$$

Es decir, buscamos máximizar a $\langle f, Df\rangle$, con las restricciones $\langle f, f\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ y $\langle \mathbf{1}, f\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Se propone la función

$$F(f, \lambda_1, \lambda_2) = \langle f, Df\rangle - \lambda_1(\langle f, f\rangle - 1) - \lambda_2\langle \mathbf{1}, f\rangle = \langle f, Df\rangle. \tag{2.1}$$

Por lo que para intentar máximizar esa función, se diferenciará con respecto a las x_i coordenadas.
Tratando así a F como una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (Podría considerarse una función de $\mathbb{R}^{n+2}$ en $\mathbb{R}$, considerando a λ_1 y λ_2 como las últimas dos coordenadas, pero las derivadas respecto a λ_1 y λ_2 son cero).

Luego

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial F}{\partial x_i} &= \tfrac{\partial}{\partial x_i}\langle f, Df\rangle - \lambda_1 \tfrac{\partial}{\partial x_i}\big(\langle f, f\rangle - 1\big) - \lambda_2 \tfrac{\partial}{\partial x_i}\langle \mathbf{1}, f\rangle \\ &= \tfrac{\partial}{\partial x_i}\langle f, Df\rangle - \lambda_1 \tfrac{\partial}{\partial x_i}\langle f, f\rangle - \lambda_2 \tfrac{\partial}{\partial x_i}\langle \mathbf{1}, f\rangle \\ &= \langle \tfrac{\partial}{\partial x_i} f, Df\rangle + \langle f, \tfrac{\partial}{\partial x_i} Df\rangle - \lambda_1\langle \tfrac{\partial}{\partial x_i} f, f\rangle - \lambda_1\langle f, \tfrac{\partial}{\partial x_i} f\rangle - \lambda_2\langle \mathbf{1}, \tfrac{\partial}{\partial x_i} f\rangle.\end{aligned}$$

Pero, es importante recordar que

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i} Df = \tfrac{\partial}{\partial x_i} \sum_{v_j, v_l \in V(G)} d(v_j, v_l) f(v_l) e_{v_j} = \sum_{v_j \in V(G)} d(v_j, v_i) e_{v_j}.$$

Por lo que

$$\langle f, \tfrac{\partial}{\partial x_i} Df\rangle = \sum_{v_j \in V(G)} d(v_i, v_j) f(v_j) = \langle e_{v_i}, Df\rangle,$$

de lo cual, la expresión para $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ se vuelve

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial F}{\partial x_i} &= \langle e_{v_i}, Df\rangle + \langle e_{v_i}, Df\rangle - \lambda_1\langle e_{v_i}, f\rangle - \lambda_1\langle f, e_{v_i}\rangle - \lambda_2\langle \mathbf{1}, e_{v_i}\rangle \\ &= 2\langle e_{v_i}, Df\rangle - 2\lambda_1\langle f, e_{v_i}\rangle - \lambda_2\langle \mathbf{1}, e_{v_i}\rangle.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Lo que es posible reescribir como

$$\tfrac{\partial F}{\partial x_i} = \langle e_{v_i}, 2Df - 2\lambda_1 f - \lambda_2 \mathbf{1}\rangle.$$

Como e_{v_i} es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ para toda i quiere decir que

$$2Df - 2\lambda_1 f - \lambda_2 \mathbf{1} = 0.$$

Es decir

$$(D - \lambda_1)f = \frac{\lambda_2 \mathbf{1}}{2}.$$

Si se define el conjunto

$$S(D) = \left\{ (f = [x_1, ..., x_n]^T, \lambda_1, \lambda_2) | f \in C(V(G)), \langle f, f \rangle = 1, \langle \mathbf{1}, f \rangle = 0 \text{ y } (D - \lambda_1)f = \frac{\lambda_2 \mathbf{1}}{2} \right\},$$

como $\langle f, f \rangle = 1$ y $\langle \mathbf{1}, f \rangle = 0$, f pertenece a la intersección entre una esfera de dimensión finita y un plano, por lo que f pertence a un conjunto compacto y por la falta de dependencia de los parametros λ_1 y λ_2 que evidencia (2.1), se tiene que $\langle f, Df \rangle$ alcanza su máximo en algún elemento de $S(D)$.

En el siguiente capítulo, se empleará este método para hacer el cálculo de la constante de encaje cuadrático de algunas gráficas, aunque favoreciendo la expresión que sugiere la siguiente:

Observación: Puesto que para máximizar a F, resulta necesario que para toda $1 \leq i \leq n$, $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$, considerando a (2.1) y a (2.2), se pueden buscar vectores para los que

$$0 = \boldsymbol{\nabla} F = \boldsymbol{\nabla} \langle f, Df \rangle - \lambda_1 \boldsymbol{\nabla} \langle f, f \rangle - \lambda_2 \boldsymbol{\nabla} \langle \mathbf{1}, f \rangle.$$

O lo que es lo mismo:

$$\boldsymbol{\nabla} \langle f, Df \rangle = \lambda_1 \boldsymbol{\nabla} \langle f, f \rangle + \lambda_2 \boldsymbol{\nabla} \langle \mathbf{1}, f \rangle.$$

Capítulo 3

Preservando la Clase EC

Dada una gráfica, pueden considerarse relaciones y operaciones en ella o entre más de una gráfica.

Lo que se pretende a lo largo de este capítulo es analizar algunas de esas relaciones y operaciones, para ver si preservan la pertenencia a la clase EC.

3.1. Subgráficas

Una pregunta que podría surgir es la siguiente: ¿Toda subgráfica de una gráfica que pertenece a la clase EC, pertenece también a esta clase?

El siguiente teorema aclara esa duda:

Teorema 3.1 [7] Sea $H = (V(H), E(H))$ una subgráfica de $G = (V(G), E(G))$. Sean d_H y d_G la distancia en las gráficas H y G respectivamente. Si para todo u, v en $V(H)$ se tiene que $d_H(u, v) = d_G(u, v)$, entonces se tiene que que $CEC(H) \leq CEC(G)$. En particular, si G es de clase EC, también lo es H.

Demostración: Dadas G y H como en las hipotesis del teorema, con $D(G)$ y $D(H)$ sus matrices de distancia. Dada la simetría de la mátriz distancia y como para toda u, v en $V(H)$ se tiene que $D(H)_{(uv)} = D(G)_{(uv)}$, si además se indexa $D(H)$ primero sobre los vértices de H y luego sobre los de $G \setminus H$, $D(G)$ tiene una expresión como sigue:

$$D(G) = \begin{pmatrix} D(H) & C \\ C^T & B \end{pmatrix}.$$

Como

$$CEC(H) = sup\,\{\langle f, D(H)f\rangle \mid \langle f, f\rangle = 1, \langle \mathbf{1}, f\rangle = 0\}.$$

Por las propiedades del supremo, dada $\epsilon > 0$, hay una f en $C_0(V(H))$con $||f|| = 1$ y $\langle \mathbf{1}, f\rangle = 0$ tal que

$$\langle f, D(H)f\rangle \geq CEC(H) - \epsilon.$$

Ahora se define $\hat{f}$ en $C_0(V(G))$, como $\hat{f}(u) = f(u)$ si u pertence a $V(H)$ y $\hat{f}(u) = 0$ en otro caso, entonces:

$$||\hat{f}||^2 = \sum_{u \in V(G)} |\hat{f}(u)|^2 = \sum_{u \in V(H)} |f(u)|^2 = ||f||^2 = 1.$$

Por lo que $||\hat{f}(u)|| = 1$ y además $\langle \mathbf{1}, f\rangle = \sum_{u \in V(G)} \hat{f}(u) = \sum_{u \in V(H)} f(u) = 0$.

Por como se definió a $\hat{f}$, se tiene que:

$$\left\langle \hat{f}, D(G)\hat{f} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} D(H) & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle f, D(H)f\rangle \geq CEC(H) - \epsilon.$$

Pero ϵ era cualquiera, entonces, para toda $\epsilon > 0$ se tiene que $CEC(G) \geq CEC(H) - \epsilon$.
De lo que se concluye que $CEC(G) \geq CEC(H)$.□

Este teorema indica que al tener una gráfica H que no sea de clase EC con ciertas caracteristicas, es posible construir una gráfica de mayor orden que tampoco sea de clase EC.

Proposición 3.2 Sea $H = (V, E)$ una gráfica de $diam(H) \leq 2$ que no pertenece a la clase EC. Sea G la gráfica con vértices $V(H) \cup \{w\}$, con w un vértice nuevo y $E(G) = E(H) \cup M$ donde M es no vacío y sus elementos son de la forma $\{u, w\}$ con u en $V(H)$, entonces G tampoco pertenece a la clase EC.

Demostración: Como $H \leq G$ y dados u, v en $V(G) \setminus \{w\}$, si la trayectoria más corta entre u y v no tiene a w como uno de sus vértices, se tiene que $d_G(u, v) = d_H(u, v)$, pero si es uno de sus vértices como $diam(H) \leq 2$, entonces $d_G(u, v) = d_H(u, v) = 2$.
Luego si G fuese de clase EC, por el teorema 2.1 H lo sería, lo cual es una contradicción.□

3.2. Operaciones de Gráficas que Preservan la Clase EC

De entre las operaciones de gráficas, algunas de las más conocidas preservan la clase EC.

3.2.1. Producto Cartesiano

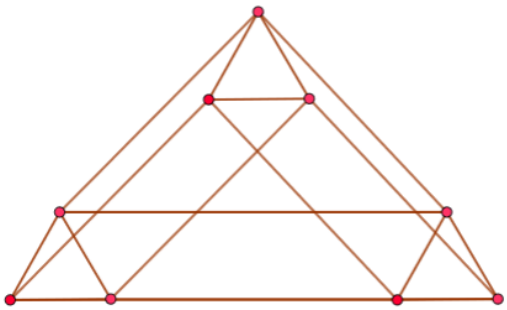


Figura 3.1: $K_3 \square K_3$

Definición 3.1 Dado un par de gráficas $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, el **producto cartesiano** $G = G_1 \times G_2$ se define como una gráfica cuyo conjunto de vértices es $V_1 \times V_2$, diremos que la pareja (u_1, v_1) es adyacente a la pareja (u_2, v_2) si y solamente si se dan cualquiera de estos dos casos

(i) u_1 es adyacente a u_2 en G_1 y $v_1 = v_2$;
(ii) v_1 es adyacente a v_2 en G_2 y $u_1 = u_2$.

Ya definido, es posible dar forma a la noción de distancia, para $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ en $V(G)$, la distancia en el producto cartesiano es

$$d\big((u_1, v_1), (u_2, v_2)\big) = d_1(u_1, u_2) + d_2(v_1, v_2).$$

Teorema 3.3 [7] Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ gráficas. Si tanto G_1 como G_2 son de clase EC, también lo es el producto cartesiano de $G_1 \times G_2 = G$. Más aún, $CEC(G) = 0$ siempre que $|V_1| \geq 2$ y $|V_2| \geq 2$.

Demostración: Para $i = 1, 2$ sea $\alpha_i : V_i \longrightarrow H_i$ un encaje cuadrático.

Se define la función $\alpha : V_1 \times V_2 \longrightarrow H_1 \oplus H_2$ como $\alpha((u, v)) = \alpha_1(u) \oplus \alpha_2(v)$.

Entonces dados (u_1, v_1) y (u_2, v_2) en $V(G)$:

$$||\alpha(u_1, v_1) - \alpha(u_2, v_2)||^2 = ||\alpha_1(u_1) \oplus \alpha_2(v_1) - \alpha_1(u_2) \oplus \alpha_2(v_2)||^2 = ||(\alpha_1(u_1) - \alpha_1(u_2)) \oplus (\alpha_2(v_1) - \alpha_2(v_2))||^2.$$

Por la versión generalizada de Pitágoras para espacios de Hilbert, esto último se convierte en

$$||\alpha_1(u_1) - \alpha_1(u_2)||^2 + ||\alpha_2(v_1) - \alpha_2(v_2)||^2.$$

Como α_1 y α_2 son encajes cuadráticos, se tiene que lo anterior no es más que la suma:

$$d_1(u_1, u_2) + d_2(v_1, v_2).$$

Así, de la cadena de igualdades se tiene que

$$||\alpha(u_1, v_1) - \alpha(u_2, v_2)||^2 = d((u_1, v_1), (u_2, v_2)).$$

De lo que concluimos que α es un encaje cuadrático de G en $H_1 \oplus H_2$. Por lo que G es de clase EC y $CEC(G) \leq 0$, por el teorema 1.2.

Ahora, si la cardinalidad del conjunto de vértices de álguna de las dos gráficas es 1, sin perder la generalidad, se asume que $|V(G_1)| = 1$ entonces $G_1 \times G_2$ no es más qe una copia de G_2 y $CEC(G) = CEC(G_2)$.

Si ese no es el caso, para inferir que $CEC(G) = 0$, basta probar que $\langle f, D(G)f\rangle = 0$ para alguna f en $C_0(V)$, que cumple además que $\langle \mathbf{1}, f\rangle = 0$ y $f \neq 0$, pues de existir al normalizarla se tendría una función de norma 1, cuyo producto interior con la matriz $D(G)$ aplicada a sí misma debe ser 0, con lo que $CEC(G)$ sería 0.

Para $i = 1, 2$ considerese a g_i en $C_0(V_i)$ tal que $\langle \mathbf{1}, g_i\rangle = 0$ y $g_i \neq 0$, esto siempre es posible cuando $|V_i| \geq 2$, puesto que dado a en $\mathbb{R}$, y $u_1, u_2, ...$ un etiquetamiento de los vértices de G_i, siempre se puede considerar la función $g_1(u_1) = a_1$, $g_1(u_2) = -a_1$ y 0 en cualquier otro caso, esta función tiene soporte finito, $g_i \neq 0$ y $\langle \mathbf{1}, g_i\rangle = 0$. Lo mismo pasa para un etiquetamiento de los vértices de G_2, $v_1, v_2, ...$ y la función g_2 tal que $g_2(v_1) = a_2$, $g_2(v_2) = -a_2$ y 0 para cualquier otro elemento.

Ahora, se define $f((u, v)) = g_1(u)g_2(v)$, al ser esta multiplicación, f tiene como soporte al conjunto finito $\{(u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_2, v_1), (u_2, v_2)\}$, por lo que está en $C_0(V)$, además como g_1 y g_2 son distintos de la función 0, existen u en V_1 y v en V_2 tal que $g_1(u) \neq 0$ y $g_2(v) \neq 0$, entonces $f((u, v)) = g_1(u)g_2(v) \neq 0$, por lo que $f \neq 0$.

También

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{1}, f\rangle &= \sum_{(u,v)\in V} f((u, v)) = \sum_{(u,v)\in V} g_1(u)g_2(v) = \sum_{u\in V_1}\sum_{v\in V_2} g_1(u)g_2(v)\\ &= \sum_{u\in V_1} g_1(u) \sum_{v\in V_2} g_2(v) = \sum_{u\in V_1} g_1(u)\, \langle \mathbf{1}, g_2\rangle = 0.\end{aligned}$$

Por último considerando a g_1 y g_2 como las g_i descritas anteriormente con $a_1 = a_2 = 1$, se tiene que:

$$\langle f, Df\rangle = \sum_{(u,v),(\hat{u},\hat{v})\in V} D_{((u,v)(\hat{u},\hat{v}))} f((u, v))f((\hat{u}, \hat{v})),$$

usando la simetría, lo anterior es igual

$$\begin{aligned}&= 2\Big(d\big((u_1, v_1), (u_1, v_2)\big) f\big((u_1, v_1)\big) f\big((u_1, v_2)\big) + d\big((u_1, v_1), (u_2, v_1)\big) f\big((u_1, v_1)\big) f\big((u_2, v_1)\big)\\ &\quad + d\big((u_1, v_1), (u_2, v_2)\big) f\big((u_1, v_1)\big) f\big((u_2, v_2)\big) + d\big((u_1, v_2), (u_2, v_1)\big) f\big((u_1, v_2)\big) f\big((u_2, v_1)\big)\\ &\quad + d\big((u_1, v_2), (u_2, v_2)\big) f\big((u_1, v_2)\big) f\big((u_2, v_2)\big) + d\big((u_2, v_1), (u_2, v_2)\big) f\big((u_2, v_1)\big) f\big((u_2, v_2)\big)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 2\Big(d\big((u_1, v_1), (u_1, v_2)\big) g_1(u_1)g_2(v_1)g_1(u_1)g_2(v_2) + d\big((u_1, v_1), (u_2, v_1)\big) g_1(u_1)g_2(v_1)g_1(u_2)g_2(v_1)\\ &\quad + d\big((u_1, v_1), (u_2, v_2)\big) g_1(u_1)g_2(v_1)g_1(u_2)g_2(v_2) + d\big((u_1, v_2), (u_2, v_1)\big) g_1(u_1)g_2(v_2)g_1(u_2)g_2(v_1)\\ &\quad + d((u_1, v_2), (u_2, v_2)) g_1(u_1)g_2(v_2)g_1(u_2)g_2(v_2) + d((u_2, v_1), (u_2, v_2)) g_1(u_2)g_2(v_1)g_1(u_2)g_2(v_2)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 2\Big(d((u_1, v_1), (u_1, v_2))(-1) + d((u_1, v_1), (u_2, v_1))(-1)\\ &\quad + d((u_1, v_1), (u_2, v_2))(1) + d((u_1, v_2), (u_2, v_1))(1)\\ &\quad + d((u_1, v_2), (u_2, v_2))(-1) + d((u_2, v_1), (u_2, v_2))(-1)\Big)\end{aligned}$$

$$= 2\Big(- d_2(v_1, v_2) - d_1(u_1, u_2) + d_1(u_1, u_2) + d_2(v_1, v_2) + d_1(u_1, u_2) + d_2(v_1, v_2) - d_1(u_1, u_2) - d_2(v_1, v_2)\Big) = 0.\square$$

Ejemplo 3.1 : Q_n

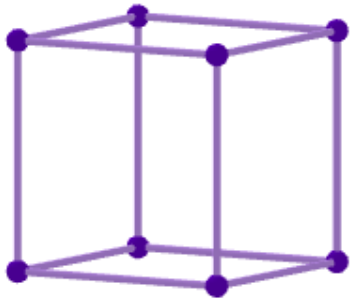


Figura 3.2: Q_3

Proposición 3.4 Para cualquier n en $\mathbb{N}$, la gráfica Q_n pertenece a la clase EC y además $CEC(Q_n) = 0$.

Demostración: Esto puede probarse de manera sencilla usando inducción, el caso base es presentado en [2], puesto que $Q_2 \cong K_2 \times K_2$, dado que como se vió en el ejemplo 2.2.2, K_n es de clase EC y por el teorema 3.3 $Q_2 \cong K_2 \times K_2$ es de clase EC.

Supongamos que para toda $k < n$ en $\mathbb{N}$, Q_k es de clase EC. Como $Q_n \cong Q_{n-1} \times K_2$, por el teorema anterior, Q_n es de clase EC.□

3.2.2. Producto Estrella

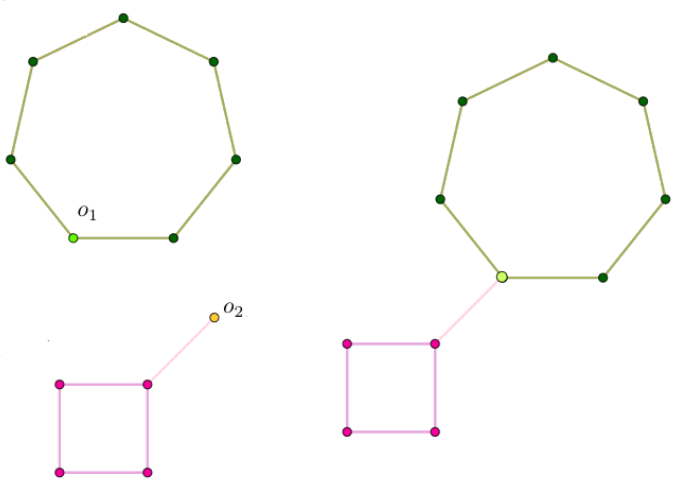


Figura 3.3: $(G_1, o_1) \star (G_2, o_2)$

Definición 3.2: Dadas dos gráficas $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, con vértices distinguidos o_1 y o_2 respectivamente. La gráfica que se obtiene al pegar ambas gráficas por los vértices o_1 y o_2, es llamada el **producto estrella** de G_1 con G_2 y se denota por $G_1 \star G_2$.
Es posible escribir el conjunto de vértices de G_1 y G_2 como $V = (V_1 \setminus \{o_1\}) \cup (V_1 \setminus \{o_1\}) \cup \{o\}$, sus aristas son la unión de las de G_1 y G_2, identificando a o_1 con o_2.

Sea d_i la distancia en G_i para $i = 1, 2$ y d la distancia en $G_1 \star G_2$, entonces:

$$d(u,v) = \left\{ \begin{array}{c} d_i(u,v) \text{ si } u, v \in V_i; \\ d_1(u,o_1) + d_2(o_2,v) \text{ si } u \in V_1, \text{ y } v \in V_2; \\ d_2(u,o_2) + d_1(o_1,v) \text{ si } u \in V_2 \text{ y } v \in V_1. \end{array} \right\}$$

Teorema 3.5 [7] Sean G_1 y G_2, dos gráficas con vértices distinguidos o_1 y o_2, respectivamente. Si tanto G_1 como G_2 son de clase EC también lo es el producto estrella $G_1 \star G_2$.

Demostración: Para $i = 1, 2$, sea $\beta_i : V_i \longrightarrow H_i$ un encaje cuadrático, asúmase que $\beta_i(o_i) = 0$, de no ser así, es posible restar $\beta_i(o_i)$ a cada entrada.

Se define $\beta : V \longrightarrow H_1 \oplus H_2$ como :

$$\beta(w) = \left\{ \begin{array}{l} \beta_1(w) \oplus 0 \text{ si } w \in V_1; \\ 0 \oplus \beta_2(w) \text{ si } w \in V_2. \end{array} \right\}$$

Debe notarse que $\beta(o) = \beta_1(o_1) + \beta_2(o_2) = 0$.

Hay que verificar que β es un encaje cuadrático.
Sean (u, v) en V, si tanto u como v están en V_i para el mismo i en $\{1, 2\}$, como β_i es un encaje cuadrático se tiene que:

$$||\beta(u) - \beta(v)||^2 = ||\beta_i(u) - \beta_i(v)||^2 = d_i(u, v) = d(u, v).$$

Supongase pues que están en V_i para índices ditintos. Sin pérdida de generalidad supongamos que u pertenece a V_1 y v a V_2:

$$||\beta(u) - \beta(v)||^2 = ||\beta_1(u) \oplus 0 - 0 \oplus \beta_2(v)||^2.$$

Por ortogonalidad de la suma directa, esto último se convierte en:

$$||\beta_1(u)||^2 + ||\beta_2(v)||^2 = ||\beta_1(u) - 0||^2 + ||\beta_2(v) - 0||^2$$

$$= ||\beta_1(u) - \beta_1(o_1)||^2 + ||\beta_2(v) - \beta_2(o_2)||^2 = d(u, o_1) + d(o_2, v) = d(u, v).$$

De lo cual, β es un encaje cuadrático, por lo que $G_1 \star G_2$ es de clase EC.□

Observación 3.6: Dada G una gráfica y P_2, a $G \star P_2$ se le llama concatenación de segmentos de G.
Si G es de clase EC como P_2 es de clase EC, por el teorema 3.6, cualquier concatenación de segmentos de G es de clase EC. En particular por ejemplo 2.2.1, para cualquier n en $\mathbb{N}$, $G \star P_n$ es de clase EC.

Proposición 3.7: Todo árbol T de orden n tiene al menos dos vértices de grado 1.

Demostración: Supongamos que no es así.

Sea $P = u_1u_2...u_l$ la trayectoria más larga en T, de longitud l.

Como a lo más hay un vértice que tiene grado menor que 2, alguno de los extremos tiene grado mayor o igual que 2. Sin pérdida de la generalidad, sea $deg(u_l) \geq 2$, entonces u_l es adyacente a otro vértice además de u_{l-1}.
Si es adyacente a otro vértice que no esté en P, entonces se tiene una contradicción, pues P no sería la trayectoria más larga; si es adyacente a otro vértice u_i en P entonces $u_iu_{i+1}...u_lu_i$ es un ciclo, lo cual también es una contradicción, pues por definición T es acíclico.□

Luego:

Corolario 3.8 [7] Todo árbol es de clase EC.

Demostración: Sea T un árbol. Se utilizará inducción sobre el orden de T. Como el caso $n = 1$ y $n = 2$ son inmediatos, se tomará como base el caso $n = 3$, puesto que ilustra la técnica a utilizar; se tiene que sólo hay un árbol de orden 3, el cual puede verse como $P_2 \star P_2$, y como P_2 es de clase EC, T es de clase EC.

Supóngase válida la afirmación para árboles con órden n y sea T un árbol de orden $n + 1$, entonces como todo árbol tiene al menos dos vértices de grado 1, tomamos v en $V(T)$, vértice de grado 1. Luego, $T \setminus \{v\}$, tiene orden n y es de clase EC por hipótesis de inducción.

Tomando como vértice distinguido al vértice w en $T \setminus \{v\}$ que era adyacente a v en T, se tiene T puede verse como $T \setminus \{v\} \star P_2$, por la observación anterior, T es de clase EC.□

3.2.3. Producto Ortogonal

Para $i = 1, 2$, se consideran las gráficas $G_i = (V_i, E_i)$ con raíz e_i. El producto ortogonal tiene sus similitudes con el producto estrella, consistiendo en pegar una copia de G_2 por su raíz, a cada vértice de G_1 salvo e_1.[5]

Definición 3.3: Si $G = (G_1, e_1) \vdash (G_2, e_2)$, se tiene entonces que $V(G) = (V_1 \setminus e_1) \times V_2 \cup (e_1, e_2)$, donde n_1 es la cardinalidad de V_1 y

$$E(G) = \Big\{ \{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\} \text{ en } V(G) \times V(G) \big| \{u_1, u_2\} \in E(G_1) \text{ y } v_1 = v_2 = e_2; \text{ o } u_1 = u_2 \text{ y } \{v_1, v_2\} \in E(G_2) \Big\}.$$

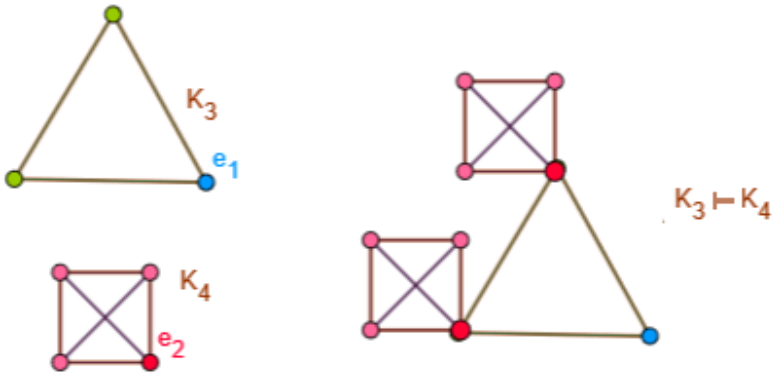


Figura 3.4: $(K_3, e_1) \vdash (K_4, e_2)$

Así definido el producto ortogonal, se tiene que

$$d\big((u_1, v_1), (u_2, v_2)\big) = \left\{ \begin{array}{c} d_1(v_1, v_2) \text{ si } u_1 = u_2; \\ d_2(v_1, e_2) + d_1(u_1, u_2) + d_2(v_2, e_2) \text{ en otro caso.} \end{array} \right\}$$

Se afirma que el producto ortogonal preserva la clase EC.

Teorema 3.9 Sean (G_1, e_1) y (G_2, e_2) dos gráficas con ráiz, ambas de clase EC, entonces $G_1 \vdash G_2$ es de clase EC.

Demostración: Para $i = 1, 2$ sea $\gamma_i : V_i \longrightarrow H_i$ un encaje cuadrático. Asumase que $\gamma_i(e_i) = 0$.

Sea u_m una indexación de $V(G_1)$.

Para (u_m, v) en V, se define $\gamma : V \longrightarrow H_1 \oplus H_2^{n_1}$, donde $n_1 = |V(G_1)|$ como

$\gamma(u_m, v) = \gamma_1(u_m) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus \gamma_2(v) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$, donde $\gamma_2(v)$ está en el $m+1$-ésimo sumando.

Por lo que para (u_l, v_1), (u_j, v_2) en $V(G)$, si $l \neq j$, suponiendo sin pérdida de generalidad que $l < j$.

$$||\gamma(u_l, v_1) - \gamma(u_j, v_2)||^2 = ||\gamma_1(u_l) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus \gamma_2(v_1) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 - \gamma_1(u_j) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus -\gamma_2(v_2) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0||^2$$

$$= ||\gamma_1(u_l) - \gamma_1(u_j) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus \gamma_2(v_1) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus \gamma_2(v_2) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0||^2.$$

Por el teorema de Pitágoras generalizado, lo anterior es

$$||\gamma_1(u_l) - \gamma_1(u_j)||^2 + ||\gamma_2(v_1)||^2 + ||\gamma_2(v_2)||^2$$

$$= ||\gamma_1(u_l) - \gamma_1(u_j)||^2 + ||\gamma_2(v_1) - 0||^2 + ||\gamma_2(v_2) - 0||^2$$

$$= ||\gamma_1(u_l) - \gamma_1(u_j)||^2 + ||\gamma_2(v_1) - \gamma_2(e_2)||^2 + ||\gamma_2(v_2) - \gamma_2(e_2)||^2.$$

Como los γ_i ya son encajes cuadráticos, lo anterior es igual a

$$d_1(u_l, u_j) + d_2(v_1, e_2) + d_2(v_2, e_2) = d((u_l, v_1), (u_j, v_2)).$$

Si por otra parte si $i = j$

$$||\gamma(u_l, v_1) - \gamma(u_j, v_2)||^2 = ||\gamma_1(u_l) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus \gamma_2(v_1) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 - \gamma_1(u_j) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus \gamma_2(v_2) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0||^2$$
$$= ||0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus \gamma_2(v_1) - \gamma_2(v_2) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus ||^2.$$

Por el teorema de Pitágoras generalizado, lo anterior es

$$||\gamma_2(v_1) - \gamma_2(v_2)||^2.$$

Pero γ_2 es un encaje cuadrático, por lo que lo anterior se convierte en

$$d_2(v_1, v_2) = d\big((u_l, v_1), (u_j, v_2)\big).$$

Por lo que γ es un encaje cuadrático. □

3.2.4. El Borrado de Aristas

En esta sección se considerarán las gráficas obtenidas a partir de K_n mediante el borrado de aristas. Tomamos $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$ y a f en $C_0(V)$ se le identificará con el vector columna $[x_1, ..., x_n]^T$ en $\mathbb{R}^n$.

El caso de borrar aristas disjuntas a pares:

Teorema 3.10 [7] Sean $r \geq 1$ y $2r \leq n$. La gráfica obtenida borrando aristas mutuamente disjuntas de la gráfica completa K_n, denotada por $K_n \setminus \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, es de clase EC y se tiene que

$$CEC(K_n \setminus \{a_1\}) = -\frac{2}{n} \text{ y } CEC(K_n \setminus \{a_1, a_2, ..., a_r\}) = 0, r \geq 2.$$

Demostración: Supongamos sin pérdida de generalidad que $e_1 = \{v_1, v_2\}, e_2 = \{v_3, v_4\}, ..., e_r = \{v_{2r-1}, v_{2r}\}$.

Si $r = 1$ entonces:

$$CEC(K_n \setminus \{a_1\}) = max\big\{\big\langle f, D(K_n \setminus \{a_1\})f\big\rangle \big| f \in C_0(V), \big\langle f, f\big\rangle = 1, \big\langle \mathbf{1}, f\big\rangle = 0\big\}.$$

Pero como $D := D(K_n \setminus \{a_1\})$ sólo cambia la distancia entre v_1 y v_2 de 1 a 2, se tiene que:

$$\big\langle f, Df\big\rangle = \sum_{i \neq j} d(v_i, v_j) f(v_i) f(v_j) = \left(\sum_{i \neq j, \{i,j\} \neq \{1,2\}} x_i x_j \right) + 2x_1 x_2$$

$$= \sum_{i,j=1} x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + +2x_1 x_2 = \big\langle \mathbf{1}, f\big\rangle^2 - ||f||^2 + 2x_1 x_2.$$

Se empleará el método descrito a finales del capítulo anterior.

Dadas las condiciones $||f||^2 = 1$ y $\langle \mathbf{1}, f \rangle = 0$, entonces, la expresión que se busca máximizar es:

$$\langle f, Df \rangle = -1 + 2x_1x_2.$$

Usando Lagrange, se definen las funciones p, q y r de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ como

$$p(x_1, ..., x_n) = -1 + 2x_1x_2;$$

$$q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2;$$

$$r(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Por lo que

$$\boldsymbol{\nabla} p = \lambda_1 \boldsymbol{\nabla} q + \lambda_2 \boldsymbol{\nabla} r.$$

Con las restricciones, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Luego

$$(2x_2, 2x_1, 0, ..., 0) = \lambda_1(2x_1, 2x_2, ..., 2x_n) + \lambda_2(1, ..., 1).$$

Por lo que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x_2 = \lambda_1 2x_1 + \lambda_2, \tag{3.1}$$

$$2x_1 = \lambda_1 2x_2 + \lambda_2, \tag{3.2}$$

Y para $i > 2$

$$0 = \lambda_1 2x_i + \lambda_2. \tag{3.3}$$

Caso 1: $\lambda_2 = 0$

Si $i > 2$, como por (3.3) $2\lambda_1 x_i = -\lambda_2 = 0$, entonces $\lambda_1 = 0$ o $x_i = 0$.

Si $\lambda_1 = 0$, entonces $2x_2 = \lambda_1 2x_1 + \lambda_2 = 0$, por lo que $2x_1x_2 = 0$ y $\langle f, Df \rangle = -1$.

Si $\lambda_1 \neq 0$, entonces con $i > 2$, $x_i = 0$.

Como

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + 0 + ... + 0 = 0.$$

Entonces $x_1 + x_2 = 0$ y $x_1 = -x_2$.

Además

$$1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 = 2x_1^2.$$

Por lo que $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $2x_1x_2 = -1$ de lo cual $\langle f, Df \rangle = -2$.

Caso 2: $\lambda_2 \neq 0$

Si $i > 2$, como $2\lambda_1 x_i = -\lambda_2$, es forzoso que $\lambda_1 \neq 0$.

Así $x_i = \dfrac{-\lambda_2}{2\lambda_1} \neq 0$, por lo que para todo $i, j \neq 1, 2$, $x_i = x_j$. Durante el caso r=1 de la prueba, al valor de x_i, $i > 2$ se le llamará x_0.

Para x_1 y x_2, despejando x_2 en (3.1) y sustituyendo en (3.2) se tiene que:

$$2x_1 = 2\lambda_1\left(\frac{2\lambda_1 x_1 + \lambda_2}{2}\right) + \lambda_2 = 2\lambda_1^2 x_1 + \lambda_2\lambda_1 + \lambda_2.$$

$$2(1 - \lambda_1^2)x_1 = \lambda_2\lambda_1 + \lambda_2.$$

Y análogamente:

$$2(1 - \lambda_1^2)x_2 = \lambda_2\lambda_1 + \lambda_2.$$

Como $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \neq 1$. Si acaso $\lambda_1 = -1$, entonces:

$$2x_1 = -2x_2 + \lambda_2,$$

por lo que

$$x_1 + x_2 = \frac{\lambda_2}{2} = x_0.$$

Luego

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + (n-2)x_0 = (n-1)x_0.$$

Pero $n > 1$ y $x_0 \neq 0$, así se tiene una contradicción.

Por lo cual $(1 - \lambda_1^2) \neq 0$, por lo que:

$$x_1 = x_2 = \frac{\lambda_2\lambda_1 + \lambda_2}{2(1 - \lambda_1^2)}. \tag{3.4}$$

Luego

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + (n-2)x_0 = 2x_1 + (n-2)x_0.$$

Entonces

$$2x_1 = -(n-2)x_0.$$

Elevando al cuadrado

$$x_1^2 = \frac{(n-2)^2 x_0^2}{4}. \tag{3.5}$$

Como

$$1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2x_1^2 + (n-2)x_0^2.$$

Y usando (3.5)

$$1 = 2\frac{(n-2)^2 x_0^2}{4} + (n-2)x_0^2 = \left[\frac{(n-2)^2}{2} + (n-2)\right] x_0^2$$

$$= \left[\frac{n^2 - 4n + 4}{2} + n - 2\right] x_0^2 = \left[\frac{n^2}{2} - n\right] x_0^2 = \frac{n(n-2)}{2} x_0^2.$$

Por lo que

$$x_0^2 = \frac{2}{n(n-2)}.$$

Por (3.5)

$$x_1^2 = \frac{(n-2)^2}{4}\frac{2}{n(n-2)} = \frac{n-2}{2n}.$$

Así

$$\langle f, Df\rangle = -1 + 2x_1x_2 = -1 + 2x_1^2 = -1 + \frac{n-2}{n} = \frac{-n+n-2}{n} = \frac{-2}{n}.$$

Después de observar a $\langle f, Df\rangle$ en todos los casos posibles, se concluye que $CEC(K_n \setminus \{a_1\}) = \frac{-2}{n}$.

Ahora se analizará el caso del borrado de r aristas, igual que en el caso de una arista, las únicas distancias que cambian son las que hay entre los extremos de cada arista, volviendose 2.
De lo que:

$$CEC(K_n \setminus \{a_1, ..., a_r\}) = max\left\{\langle f, Df\rangle = -1 + 2x_1x_2 + ... + 2x_{2r-1}x_{2r} \middle| ||f|| = 1, \langle \mathbf{1}, f\rangle = 0\right\}$$

Se proponen p, q y r de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, con

$$p(x_1, ..., x_n) = -1 + 2x_1x_2 + ... + 2x_{2r-1}x_{2r}$$

$$q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$r(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Como en el caso anterior, usando la técnica ya discutida para maximizar, se tiene que

$$\boldsymbol{\nabla} p = \lambda_1 \boldsymbol{\nabla} q + \lambda_2 \boldsymbol{\nabla} r,$$

con las restricciones $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.
Por lo cual

$$(2x_2, 2x_1, 2x_4, 2x_3, ..., 2x_{2r}, 2x_{2r-1}, 0, ..., 0) = \lambda_1(2x_1, 2x_2, ..., 2x_n) + \lambda_2(1, ..., 1)$$

Obteniendo así el sístema de ecuaciones:

Si $1 \leq j \leq r$

$$2x_{2j} = 2\lambda_1 x_{2j-1} + \lambda_2,$$

$$2x_{2j-1} = 2\lambda_1 x_{2j} + \lambda_2.$$

Si $2r + 1 \leq i$

$$0 = 2\lambda_1 x_i + \lambda_2.$$

Caso 1: $\lambda_2 = 0$

En cuyo caso $\lambda_1 = 0$ o para $i > 2r$, $x_i = 0$.

Si $\lambda_1 = 0$, para $1 \leq j \leq r$, como

$$2x_{2j} = 2\lambda_1 x_{2j-1} + \lambda_2 = 0x_{2j-1} + 0 = 0$$

Entonces $x_{2j} = 0$, luego $2x_{2j-1}x_{2j} = 0$ para toda $1 \leq j \leq r$. Así, $2x_1x_2 + ... + 2x_{2r-1}x_{2r} = 0$. Por lo que $\langle f, Df\rangle = -1$.

Si $\lambda_1 \neq 0$, entonces para toda $i > 2r$ se tiene que $x_i = 0$.

En este caso

$$\sum_{l=1}^{2r} x_l = 0 \text{ y } \sum_{l=1}^{2r} x_l^2 = 1.$$

Además para $1 \leq j \leq r$

$$2x_{2j-1} = 2\lambda_1 x_{2j},$$

$$2x_{2j} = 2\lambda_1 x_{2j-1}.$$

Por lo cual $x_{2j-1} = \lambda_1 x_{2j} = \lambda_1^2 x_{2j-1}$, así $\lambda_1^2 = 1$, entonces $\lambda_1 = 1$ o $\lambda_1 = -1$.

Si $\lambda_1 = 1$, entonces $x_{2j-1} = x_{2j}$.

Como

$$1 = \sum_{l=1}^{2r} x_l^2 = 2\sum_{j=1}^{r} x_{2j-1}x_{2j},$$

entonces $\langle f, Df \rangle = -1 + 2\sum_{j=1}^{r} x_{2j-1}x_{2j} = -1 + 1 = 0$.

Si $\lambda_1 = -1$, entonces $x_{2j-1} = -x_{2j}$.

Lo que implica que

$$1 = \sum_{l=1}^{2r} x_l^2 = -2\sum_{j=1}^{r} x_{2j-1}x_{2j}.$$

Por lo tanto

$$\langle f, Df \rangle = -1 + 2\sum_{j=1}^{r} x_{2j-1}x_{2j} = -1 - 1 = -2.$$

Caso 2: $\lambda_2 \neq 0$

En este caso, para toda $i > 2r$ se tiene que $2\lambda_1 x_i + \lambda_2 = 0$ por lo que $2\lambda_1 x_i = -\lambda_2$.

Como $\lambda_2 \neq 0$, entonces $\lambda_1 \neq 0$ y $x_i \neq 0$ entonces

$$x_i = \frac{-\lambda_2}{2\lambda_1}$$

Para toda $i \neq k$ con $i, k > 2r$ se tiene que $x_i = x_k$. A este valor distinto de cero, lo llamaremos x_0.

Por otro lado, con $j \in \{1, ..., r\}$.

$$2x_{2j-1} = 2\lambda_1 x_{2j} + \lambda_2,$$

$$2x_{2j} = 2\lambda_1 x_{2j-1} + \lambda_2.$$

Por lo que

$$2x_{2j} = 2\lambda_1^2 x_{2j} + \lambda_2\lambda_1 + \lambda_2.$$

Entonces

$$2(1 - \lambda_1^2)x_{2j} = \lambda_2\lambda_1 + \lambda_2.$$

Pero como $\lambda_2 \neq 0$ y $1 \neq \lambda_1$, si $\lambda_1 = -1$, se tendría que para todo $x < r$

$$2x_{2j} = -2x_{2j-1} + \lambda_2,$$

por lo cual $x_{2j} + x_{2j-1} = x_0$.

Como $0 = \sum_{i=1}^{n} x_i = r(x_0) + (n - 2r)x_0 = (n - r)x_0 \neq 0$, como $n \neq r$ se tiene una contradicción y $\lambda_1 \neq -1$.

Entonces $(1 - \lambda_1^2) \neq 0$ y

$$x_{2j} = \frac{\lambda_2\lambda_1 + \lambda_2}{2(1-\lambda_1^2)}.$$

Y también

$$2x_{2j-1} = 2\lambda_1^2 x_{2j-1} + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2$$

Así que de igual manera

$$x_{2j-1} = \frac{\lambda_2\lambda_1 + \lambda_2}{2(1-\lambda_1^2)}$$

Por lo cual, para toda $k \neq l$ y $k, l \leq 2r$ se tiene que $x_k = x_l$, en particular si $k \leq 2r$, $x_1 = x_k$.

Entonces

$$0 = \sum_{l=1}^{n} x_l = (2r)x_1 + (n-2r)x_{2r+1}$$

Si $r = \frac{n}{2}$, entonces $x_1 = 0$, pero eso es imposible, pues

$$1 = \sum_{l=1}^{n} x_l^2 = \sum_{l=1}^{2r} x_1^2 = 2r(x_1^2) = 0$$

Suponiendo $n > 2r$, se tiene que

$$x_1 = -\frac{(n-2r)}{2r}x_{2r+1} \tag{3.6}$$

Entonces

$$1 = \sum_{l=1}^{n} x_l^2 = (2r)x_1^2 + (n-2r)x_{2r+1}^2 = (2r)\left(\frac{(n-2r)}{2r}x_{2r+1}\right)^2 + (n-2r)x_{2r+1}^2$$

$$= (2r)\frac{(n-2r)^2}{4r^2}x_{2r+1}^2 + (n-2r)x_{2r+1}^2 = \left[\frac{(n-2r)^2}{2r} + (n-2r)\right]x_{2r+1}^2$$

$$= \left[\frac{n^2-4nr+4r^2}{2r} + n - 2r\right]x_{2r+1}^2 = \left[\frac{n^2-4nr+4r^2+2nr-4r^2}{2r}\right]x_{2r+1}^2$$

$$= \left[\frac{n^2-2nr}{2r}\right]x_{2r+1}^2 = \left[\frac{n(n-2r)}{2r}\right]x_{2r+1}^2$$

Es decir

$$\frac{n(n-2r)}{2r}x_{2r+1}^2 = 1$$

Por lo cual

$$x_{2r+1}^2 = \frac{2r}{n(n-2r)}.$$

Elevando (3.6) al cuadrado y sustituyendo se tiene que:

$$x_1^2 = \frac{(n-2r)^2}{4r^2}\frac{2r}{n(n-2r)} = \frac{n-2r}{2rn}$$

Por lo cual

$$2x_1x_2 + ... + 2x_{2r-1}x_{2r} = 2r(x_1x_2) = 2rx_1^2 = \frac{2r(n-2r)}{2rn} = \frac{(n-2r)}{n}$$

Entonces

$$\langle f, Df\rangle = -1 + \frac{n-2r}{n} = \frac{-2r}{n}$$

Así, después de analizar todos los casos, tomando el máximo se concluye que:

$$CEC(K_n \setminus \{a_1, ..., a_r\}) = -1 + 1 = 0.\square$$

De este teorema podemos derivar los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.2 : El Diamante

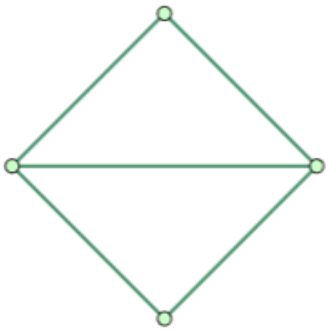


Figura 3.5: Diamante

En [2] se incluye una lista con algunas gráficas conocidas con sus nombres respectivos, a K_4 sin una arista la nombra "diamante".

Proposición 3.11 La gráfica diamante es de clase EC.

Demostración: Como esta gráfica puede ser vista como $K_4 \setminus a_1$ con a_1 un elemento de $E(K_4)$, por el teorema 3.10 se tiene que:

$$CEC(Diamante) = CEC(K_4 \setminus a_1) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}.$$

Por lo cual, la gráfica diamante es de clase EC.□

Ejemplo 3.3 : C_4

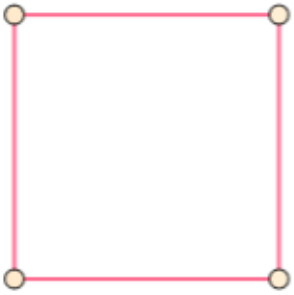


Figura 3.6: C_4

Proposición 3.12 C_4 es de clase EC.

Demostración: Como C_4 puede ser visto como K_4 con 2 aristas mutuamente disjuntas removidas, es decir como $K_4 \setminus \{a_1, a_2\}$, con $\{a_1, a_2\} \subset E(K_4)$, con $a_1 \cap a_2 = \emptyset$, por el teorema 3.10, se tiene que

$$CEC(C_4) = CEC(K_4 \setminus \{a_1, a_2\}) = 0.$$

Por lo que C_4 también pertenece a la clase EC. □

Respecto al borrado de aristas, hasta ahora se ha estudiado que sucede con la clase EC de una gráfica completa al borrar de ella una o más aristas disjuntas.

Ahora, la pregunta es: ¿Qué pasaría si a una gráfica completa se le borrase un clan?

El siguiente teorema resulta indicativo.

Teorema 3.13 [7] Para $2 \leq r < n$ se tiene que

$$CEC(K_n \setminus K_r) = r - 2 - \frac{r(r-1)}{n}.$$

En particular $K_n \setminus K_r$ es de clase EC si y solamente si uno de los siguientes 4 casos ocurren:

- $r = 2$ y $n \geq 3$;
- $r = 3$ y $n = 4, 5, 6$;
- $r = 4$ y $n = 5, 6$;
- $r \geq 5$ y $n = r + 1$.

Demostración: Sea $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ el conjunto de vértices de K_n, con $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ los de K_r.

Dada f en $C(V(K_n))$, con $f(v_i) = x_i$ para $1 \leq i \leq n$, se identifica a f con el vector $[x_1, ..., x_n]^T$ en $\mathbb{R}^n$. Entonces, como todos en el clan están a distancia 1, borrar esas aristas pone a todos los del clan a distancia 2.

Por lo que

$$\langle f, Df \rangle = -||f||^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq r} 2x_i x_j.$$

Para calcular $CEC(K_n \setminus K_r)$ se debe calcular el máximo de la expresión anterior sujeto a las condiciones $||f||^2 = 1$ y $\langle \mathbf{1}, f \rangle = 0$.

Se definen p, q, r funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ como sigue:

$$p(x_1, ..., x_n) = -1 + \sum_{1 \leq i < j \leq r} 2x_i x_j;$$

$$q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2;$$

$$r(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Usando la misma técnica, se tiene que:

$$\boldsymbol{\nabla} p = \lambda_1 \boldsymbol{\nabla} q + \lambda_2 \boldsymbol{\nabla} r,$$

con las restricciones $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Para $m \leq r$, se tiene que

$$2 \sum_{i \neq m, 1 \leq i \leq r} x_i = 2\lambda_1 x_m + \lambda_2.$$

Y para $m > r$ se tiene que $0 = 2\lambda_1 x_m + \lambda_2$.

Caso 1: $\lambda_2 = 0$

En ese caso, para $m > r$, $2\lambda_1 x_m = 0$, por lo que $\lambda_1 = 0$ o $x_m = 0$.

Si $\lambda_1 = 0$, entonces como

$$2 \sum_{i \neq m, 1 \leq i \leq r} x_i = 2\lambda_1 x_m + \lambda_2 = 0.$$

Luego para cada $m \leq r$, multiplicando la expresión anterior por x_m

$$\left(2 \sum_{i \neq m, 1 \leq i \leq r} x_i \right) x_m = 0.$$

Sumandose sobre todas las $1 \leq m \leq r$ se tiene que

$$0 = \sum_{m=1}^{r} 0 = \sum_{m=1}^{r} \left(2 \sum_{i \neq m, 1 \leq i \leq r} x_i \right) x_m = 2 \sum_{1 \leq i < m \leq r} 2 x_i x_m.$$

Así

$$\sum_{1 \leq i < m \leq r} 2 x_i x_m = 0.$$

Concluyendose que para este caso $\langle f, Df \rangle = -1 + 0 = -1$.

Si para $i > r$, $x_i = 0$, entonces

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{r} x_i.$$

Luego para $m \leq r$

$$2\lambda_1 x_m = 2 \sum_{i \neq m, 1 \leq i \leq r} x_i = 2 \sum_{i \neq m, 1 \leq i \leq r} x_i - 0 = 2 \sum_{i \neq m, 1 \leq i \leq r} x_i - 2 \sum_{i=1}^{r} x_i = -2 x_m.$$

Como x_m no puede ser cero para todo $m \leq r$, pues $\sum_{i=1}^{r} x_i^2 = 1$, entonces $\lambda_1 = -1$ y

$$2 \sum_{i \neq m, 1 \leq i \leq r} x_i = -2 x_m.$$

Multiplicando por x_m:

$$\left(2 \sum_{i \neq m, 1 \leq i \leq r} x_i \right) x_m = -2 x_m^2.$$

Sumando sobre todas las $m \leq r$, se tiene que

$$\sum_{m=1}^{r} \left(2 \sum_{i \neq m, 1 \leq i \leq r} x_i \right) x_m = -2 \sum_{m=1}^{r} \left(x_m^2 \right) = -2.$$

Entonces

$$2 \sum_{1 \leq i < m \leq r} 2 x_i x_m = \sum_{m=1}^{r} \left(2 \sum_{i \neq m, 1 \leq i \leq r} x_i \right) x_m = -2.$$

Así

$$\sum_{1 \leq i < m \leq r} 2 x_i x_m = -1.$$

Por lo que en este caso

$$\langle f, Df \rangle = -1 - 1 = -2.$$

Caso 2: $\lambda_2 \neq 0$

Por su parte, si $k > r$ entonces

$$0 = 2\lambda_1 x_k + \lambda_2$$

De nuevo, como $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0.$, así

$$x_k = -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1}., \tag{3.7}$$

entonces para toda $l, k > r$ se tiene que $x_l = x_k$, en particular para $k = r + 1$.

Entonces si $j \leq r$

$$2\lambda_1 x_j + \lambda_2 = 2\left(\sum_{i\neq j\ 1\leq i\leq r} x_i\right). \tag{3.8}$$

Entonces dados $j, m \leq r$

$$2\left(\sum_{i\neq m\ 1\leq i\leq r} x_i\right) - 2\lambda_1 x_m = \lambda_2 = 2\left(\sum_{i\neq j\ 1\leq i\leq r} x_i\right) - 2\lambda_1 x_j.$$

Despejando

$$2x_j - 2x_m = 2\lambda_1 x_m - 2\lambda_1 x_j.$$

Luego

$$2(1+\lambda_1)x_j = 2(\lambda_1 + 1)x_m. \tag{3.9}$$

Si $\lambda_1 = -1$, entonces de (3.8)

$$-2x_j + \lambda_2 = 2\left(\sum_{i\neq j\ 1\leq i\leq r} x_i\right).$$

y

$$\lambda_2 = 2\sum_{i=1}^{r} x_i.$$

Además de (3.7)

$$\sum_{i=r+1}^{n} x_i = \sum_{i=r+1}^{n} -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} = (n-r)\frac{\lambda_2}{2}.$$

Entonces

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{r} x_i + \sum_{i=r+1}^{n} x_i = \frac{\lambda_2}{2} + (n-r)\frac{\lambda_2}{2} = \frac{n-r+1}{2}\lambda_2.$$

Como $n > r$, entonces λ_2 sería 0, lo cual es una contradicción.

Por lo cual $\lambda_1 \neq -1$.

Y entonces de (3.9) se tiene que para toda $m, j \leq r$, $x_m = x_j$, en particular para $j = 1$.

Luego

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i = rx_1 + (n-r)x_{r+1}.$$

Despejando

$$x_1 = -\left(\frac{(n-r)}{r}x_{r+1}\right). \tag{3.10}$$

Elevando al cuadrado

$$x_1^2 = \left(\frac{(n-r)^2}{r^2}x_{r+1}^2\right). \tag{3.11}$$

Así

$$1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = rx_1^2 + (n-r)x_{r+1}^2.$$

Sustituyendo con (3.11)

$$1 = rx_1^2 + (n-r)x_{r+1}^2 = r\frac{(n-r)^2}{r^2}x_{r+1}^2 + (n-r)x_{r+1}^2 = \left[\frac{(n-r)^2}{r} + (n-r)\right]x_{r+1}^2.$$

Entonces

$$1 = \frac{n^2 - 2nr + r^2 + rn - r^2}{r}x_{r+1}^2 = \frac{n^2 - nr}{r}x_{r+1}^2 = \frac{n(n-r)}{r}x_{r+1}^2.$$

Por lo cual

$$x_{r+1}^2 = \frac{r}{n(n-r)}.$$

De (3.11)

$$x_1^2 = \frac{(n-r)^2}{r^2}\frac{r}{n(n-r)} = \frac{n-r}{nr}.$$

Obsérvese entonces que:

$$\sum_{1\leq i<j\leq r} 2x_ix_j = \sum_{j=2}^{r}\sum_{i=1}^{j-1} 2x_ix_j = \sum_{j=2}^{r}\sum_{i=1}^{j-1} 2x_1^2 = 2x_1^2\sum_{j=2}^{r}\sum_{i=1}^{j-1} 1 = 2x_1^2\sum_{j=2}^{r}(j-1) = 2x_1^2\sum_{j=1}^{r-1}(j)$$

$$= 2x_1^2\frac{(r-1)(r)}{2} = \ 2\frac{(n-r)}{nr}\frac{(r-1)r}{2} = \frac{(n-r)(r-1)}{n}.$$

Por lo cual, en este caso

$$\langle f, Df\rangle = -1 + \frac{(n-r)(r-1)}{n} = \frac{-n+nr-n-r^2+r}{n} = \frac{n(r-2)-r(r-1)}{n} = r-2-\frac{r(r-1)}{n}.$$

Después de observar el resultado en todos los casos, como dadas las hipótesis, $\dfrac{(n-r)(r-1)}{n}$ es siempre positivo. Entonces la expresión anterior, es en efecto el máximo, es decir

$$CEC(K_n \setminus K_r) = r-2-\frac{r(r-1)}{n}. \tag{3.12}$$

Para que $K_n \setminus K_r$ pertenezca a la clase EC se necesita que

$$CEC(K_n \setminus K_r) \leq 0.$$

Es decir por (3.12)

$$r-2-\frac{r(r-1)}{n} \leq 0.$$

Entonces

$$n(r-2) \leq r(r-1). \tag{3.13}$$

- En el primer caso $r = 2$, de (3.13)
$$0 = (2-2)n \leq 2(2-1) = 2.$$
como $0 \leq 2$ siempre, basta con que $r < n$, así $n \geq 3$.
- Si $r = 3$ por (3.13)
$$n = (3-2)n \leq 3(3-1) = 6.$$
Así, $3 < n \leq 6$ y tenemos el segundo caso.
- Si $r = 4$ por (3.13)
$$2n = (4-2)n \leq 4(4-1) = 12.$$
Luego, $4 < n \leq 6$ y se cumple el tercer caso.
- Para el último caso, si $r \geq 5$, se tiene que de (3.13)
$$(r-2)r < (r-2)n \leq r(r-1).$$
Se tiene que $n \geq r+1$, pero si $n \geq r+2$ entonces
$$(r-2)n \geq (r-2)(r+2) = r^2-4 > r^2-r = r(r-1).$$
se concluye así que para este caso $n = r+1$.

Con estas últimas afirmaciones, se concluye la prueba del teorema. □

El siguiente ejemplo es para ilustrar el teorema 3.13.

Ejemplo 3.4 : $K_{1,3}$

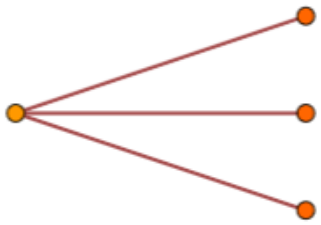


Figura 3.7: $K_{1,3}$

Esta gráfica, también llamada *garra* [2], es la bipartita completa $K_{1,3}$.

Proposición 3.14 $K_{1,3}$ es de clase EC.

Demostración: Esta gráfica puede ser vista como $K_4 \setminus K_3$. Usando el teorema 3.13 se tiene que

$$CEC(K_4 \setminus K_3) = 3 - 2 - \frac{3(3-1)}{4} = 1 - \frac{6}{4} = -\frac{1}{2} \leq 0.$$

Por lo cual $K_{1,3}$ pertenece a la clase EC.□

Bibliografía

[1] Balakrishnan R., Ranganathan K. (2012) *A Textbook of Graph Theory*(2 Ed.). Nueva York, NY, EUA: Springer.

[2] Brandstädt A., Le B.V., Spinrad, J.P. (1999)*Graph Classes: a Survey*. EUA: SIAM monographs on discrete mathematics and applications.

[3] Clapp M. (2015) *Análisis Matemático*. México: papirhos, IMUNAM.

[4] Lavor C., Loberti L., Maculan N., Mucherino A. (2014). Euclidean Distance Geometry and Applications. *SIAM Review*. 56(1), 3-69.

[5] Lenczewski, R. (2006). *Decompositions of the Free Additive Convolution*. arXiv:math/0608236 [math.OA].

[6] Młotkowski, W., Obata, N. (2018).*On Quadratic Embedding Constants of Star Product Graphs*. arXiv:1802.01214 [math.CO].

[7] Obata, N., Zakiyyah A.Y., (2018). Distance matrices and quadratic embedding of graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. 6(1) DOI: http://dx.doi.org/10.5614/ejgta.2018.6.1.4

[8] Schoenberg I.J. (1938) On Certain Metric Spaces Arising From Euclidean Spaces by a Change of Metric and Their Imbedding in Hilbert Space. *Annals of Mathematics, Second Series*, 38(4), 787-793.

[9] Thomassen, C. (1994). Embeddings of Graphs. *Discrete Mathematics*. 124, 217-228.