El problema polinomial de puntos de adherencia en espacios de Banach

Sofía Ortega Castillo

Universidad de Guadalajara

Mini-encuentro de Análisis Matemático y temas relacionados
IIMAS, Ciudad Universitaria, UNAM
9 de noviembre de 2023

Problema de la Corona

Denotemos por $H^\infty(\mathbb{D})$ a las funciones holomorfas y acotadas en el disco unitario del plano complejo $\mathbb{C}$ y por $\mathcal{M}_{H^\infty(\mathbb{D})}$ a su espectro: Los homomorfismos de álgebra de $H^\infty(\mathbb{D})$ en $\mathbb{C}$ distintos del cero, llamados caracteres de $H^\infty(\mathbb{D})$.

Ejemplo

Dado $x \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} \delta_x : H^\infty(\mathbb{D}) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es un caracter de $H^\infty(\mathbb{D})$.

¿Cómo hallamos más caracteres? Por medio de ultrafiltros.

Problema de la Corona

Denotemos por $H^\infty(\mathbb{D})$ a las funciones holomorfas y acotadas en el disco unitario del plano complejo $\mathbb{C}$ y por $\mathcal{M}_{H^\infty(\mathbb{D})}$ a su espectro: Los homomorfismos de álgebra de $H^\infty(\mathbb{D})$ en $\mathbb{C}$ distintos del cero, llamados caracteres de $H^\infty(\mathbb{D})$.

Ejemplo

Dado $x \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} \delta_x : H^\infty(\mathbb{D}) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es un caracter de $H^\infty(\mathbb{D})$.

¿Cómo hallamos más caracteres? Por medio de ultrafiltros.

Problema de la Corona

Denotemos por $H^\infty(\mathbb{D})$ a las funciones holomorfas y acotadas en el disco unitario del plano complejo $\mathbb{C}$ y por $\mathcal{M}_{H^\infty(\mathbb{D})}$ a su espectro: Los homomorfismos de álgebra de $H^\infty(\mathbb{D})$ en $\mathbb{C}$ distintos del cero, llamados caracteres de $H^\infty(\mathbb{D})$.

Ejemplo

Dado $x \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} \delta_x : H^\infty(\mathbb{D}) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es un caracter de $H^\infty(\mathbb{D})$.

¿Cómo hallamos más caracteres? Por medio de ultrafiltros.

Problema de la Corona

Denotemos por $H^{\infty}(\mathbb{D})$ a las funciones holomorfas y acotadas en el disco unitario del plano complejo $\mathbb{C}$ y por $\mathcal{M}_{H^{\infty}(\mathbb{D})}$ a su espectro: Los homomorfismos de álgebra de $H^{\infty}(\mathbb{D})$ en $\mathbb{C}$ distintos del cero, llamados caracteres de $H^{\infty}(\mathbb{D})$.

Ejemplo

Dado $x \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} \delta_x : H^{\infty}(\mathbb{D}) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es un caracter de $H^{\infty}(\mathbb{D})$.

¿Cómo hallamos más caracteres? Por medio de ultrafiltros.

Problema de la Corona

Denotemos por $H^\infty(\mathbb{D})$ a las funciones holomorfas y acotadas en el disco unitario del plano complejo $\mathbb{C}$ y por $\mathcal{M}_{H^\infty(\mathbb{D})}$ a su espectro:
Los homomorfismos de álgebra de $H^\infty(\mathbb{D})$ en $\mathbb{C}$ distintos del cero, llamados caracteres de $H^\infty(\mathbb{D})$.

Ejemplo

Dado $x \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} \delta_x : H^\infty(\mathbb{D}) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es un caracter de $H^\infty(\mathbb{D})$.

¿Cómo hallamos más caracteres? Por medio de ultrafiltros.

Sea Y un conjunto. Un filtro sobre Y es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Y que cumple que

- $Y \in \mathcal{A}$,
- $\emptyset \notin \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A}$ and $A \subset B$ implica $B \in \mathcal{A}$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ implica $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es un ultrafiltro si para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$, se tiene que $A \in \mathcal{A}$ o $Y \setminus A \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es libre si no es principal, es decir, si no existe $y \in Y$ tal que $\mathcal{A} = \{A \subset Y : y \in A\}$.

Sea Y un conjunto. Un filtro sobre Y es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Y que cumple que

- $Y \in \mathcal{A}$,
- $\emptyset \notin \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A}$ and $A \subset B$ implica $B \in \mathcal{A}$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ implica $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es un ultrafiltro si para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$, se tiene que $A \in \mathcal{A}$ o $Y \setminus A \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es libre si no es principal, es decir, si no existe $y \in Y$ tal que $\mathcal{A} = \{A \subset Y : y \in A\}$.

Sea Y un conjunto. Un filtro sobre Y es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Y que cumple que

- $Y \in \mathcal{A}$,
- $\emptyset \notin \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A}$ and $A \subset B$ implica $B \in \mathcal{A}$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ implica $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es un ultrafiltro si para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$, se tiene que $A \in \mathcal{A}$ o $Y \setminus A \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es libre si no es principal, es decir, si no existe $y \in Y$ tal que $\mathcal{A} = \{A \subset Y : y \in A\}$.

PPPA

Sea Y un conjunto. Un filtro sobre Y es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Y que cumple que

- $Y \in \mathcal{A}$,
- $\emptyset \notin \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A}$ and $A \subset B$ implica $B \in \mathcal{A}$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ implica $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es un ultrafiltro si para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$, se tiene que $A \in \mathcal{A}$ o $Y \setminus A \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es libre si no es principal, es decir, si no existe $y \in Y$ tal que $\mathcal{A} = \{A \subset Y : y \in A\}$.

PPPA

Sea Y un conjunto. Un filtro sobre Y es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Y que cumple que

- $Y \in \mathcal{A}$,
- $\emptyset \notin \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A}$ and $A \subset B$ implica $B \in \mathcal{A}$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ implica $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es un ultrafiltro si para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$, se tiene que $A \in \mathcal{A}$ o $Y \setminus A \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es libre si no es principal, es decir, si no existe $y \in Y$ tal que $\mathcal{A} = \{A \subset Y : y \in A\}$.

Sea Y un conjunto. Un filtro sobre Y es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Y que cumple que

- $Y \in \mathcal{A}$,
- $\emptyset \notin \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A}$ and $A \subset B$ implica $B \in \mathcal{A}$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ implica $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es un ultrafiltro si para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$, se tiene que $A \in \mathcal{A}$ o $Y \setminus A \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es libre si no es principal, es decir, si no existe $y \in Y$ tal que $\mathcal{A} = \{A \subset Y : y \in A\}$.

Sea Y un conjunto. Un filtro sobre Y es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Y que cumple que

- $Y \in \mathcal{A}$,
- $\emptyset \notin \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A}$ and $A \subset B$ implica $B \in \mathcal{A}$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ implica $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es un ultrafiltro si para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$, se tiene que $A \in \mathcal{A}$ o $Y \setminus A \in \mathcal{A}$.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre Y es libre si no es principal, es decir, si no existe $y \in Y$ tal que $\mathcal{A} = \{A \subset Y : y \in A\}$.

Observación

$\mathbb{N}$ admite un ultrafiltro libre.

Observación

Si $\mathcal{U}$ es un (ultra)filtro sobre $\mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to Y$ es una función entonces $g_*(\mathcal{U}) = \{A \subset Y : g^{-1}(A) \in \mathcal{U}\}$ es un (ultra)filtro sobre Y.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre un espacio topológico Y se dice que converge a un punto $y \in Y$ si para todo abierto U conteniendo a y, $U \in \mathcal{A}$.

Y una función $g : \mathbb{N} \to Y$, con Y nuevamente un espacio topológico y teniendo $\mathcal{U}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$, se dice que tiene a $y \in Y$ como $\mathcal{U}$-límite si $g_*(\mathcal{U})$ converge a y.

Observación

$\mathbb{N}$ admite un ultrafiltro libre.

Observación

Si $\mathcal{U}$ es un (ultra)filtro sobre $\mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to Y$ es una función entonces $g_*(\mathcal{U}) = \{A \subset Y : g^{-1}(A) \in \mathcal{U}\}$ es un (ultra)filtro sobre Y.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre un espacio topológico Y se dice que converge a un punto $y \in Y$ si para todo abierto U conteniendo a y, $U \in \mathcal{A}$.

Y una función $g : \mathbb{N} \to Y$, con Y nuevamente un espacio topológico y teniendo $\mathcal{U}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$, se dice que tiene a $y \in Y$ como $\mathcal{U}$-límite si $g_*(\mathcal{U})$ converge a y.

Observación

$\mathbb{N}$ admite un ultrafiltro libre.

Observación

Si $\mathcal{U}$ es un (ultra)filtro sobre $\mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to Y$ es una función entonces $g_*(\mathcal{U}) = \{A \subset Y : g^{-1}(A) \in \mathcal{U}\}$ es un (ultra)filtro sobre Y.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre un espacio topológico Y se dice que converge a un punto $y \in Y$ si para todo abierto U conteniendo a y, $U \in \mathcal{A}$.

Y una función $g : \mathbb{N} \to Y$, con Y nuevamente un espacio topológico y teniendo $\mathcal{U}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$, se dice que tiene a $y \in Y$ como $\mathcal{U}$-límite si $g_*(\mathcal{U})$ converge a y.

Observación

$\mathbb{N}$ admite un ultrafiltro libre.

Observación

Si $\mathcal{U}$ es un (ultra)filtro sobre $\mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to Y$ es una función entonces $g_*(\mathcal{U}) = \{A \subset Y : g^{-1}(A) \in \mathcal{U}\}$ es un (ultra)filtro sobre Y.

Un filtro $\mathcal{A}$ sobre un espacio topológico Y se dice que converge a un punto $y \in Y$ si para todo abierto U conteniendo a y, $U \in \mathcal{A}$.

Y una función $g : \mathbb{N} \to Y$, con Y nuevamente un espacio topológico y teniendo $\mathcal{U}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$, se dice que tiene a $y \in Y$ como $\mathcal{U}$-límite si $g_*(\mathcal{U})$ converge a y.

Observación

Si Y es compacto y Hausdorff, todo ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre Y converge a exactamente un punto.

Dada (x_n) una sucesión en $\mathbb{D}$, definimos el caracter

$$\begin{aligned} \tau_{(x_n)} : H^\infty(\mathbb{D}) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto \lim_{\mathcal{U}} f(x_n) \end{aligned}$$

para $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre sobre $\mathbb{N}$.

Problema de la Corona

Definición

Dada $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, su transformada de Gelfand está dada por

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathcal{M}_{H^\infty(\mathbb{D})} &\to \mathbb{C} \\ \tau &\mapsto \tau(f) \end{aligned}$$

La topología débil estrella en $\mathcal{M}_{H^\infty(\mathbb{D})}$ es la mínima topología en dicho espacio que hace continuas a las transformadas de Gelfand de cada $f \in H^\infty(\mathbb{D})$.

La Corona de $H^\infty(\mathbb{D})$ consiste en los caracteres de $H^\infty(\mathbb{D})$ que no pertenecen a la cerradura en la topología débil estrella de $\{\delta_x : x \in \mathbb{D}\}$.

El teorema de la Corona para las funciones holomorfas y acotadas en $\mathbb{D}$ afirma que la Corona de $H^\infty(\mathbb{D})$ es vacía (Carleson, 1962).

Definición

Dada $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, su transformada de Gelfand está dada por

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathcal{M}_{H^\infty(\mathbb{D})} &\to \mathbb{C} \\ \tau &\mapsto \tau(f) \end{aligned}$$

La topología débil estrella en $\mathcal{M}_{H^\infty(\mathbb{D})}$ es la mínima topología en dicho espacio que hace continuas a las transformadas de Gelfand de cada $f \in H^\infty(\mathbb{D})$.

La Corona de $H^\infty(\mathbb{D})$ consiste en los caracteres de $H^\infty(\mathbb{D})$ que no pertenecen a la cerradura en la topología débil estrella de $\{\delta_x : x \in \mathbb{D}\}$.

El teorema de la Corona para las funciones holomorfas y acotadas en $\mathbb{D}$ afirma que la Corona de $H^\infty(\mathbb{D})$ es vacía (Carleson, 1962).

Problema de la Corona

Definición

Dada $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, su transformada de Gelfand está dada por

$$\hat{f} : \mathcal{M}_{H^\infty(\mathbb{D})} \to \mathbb{C}$$
$$\tau \mapsto \tau(f)$$

La topología débil estrella en $\mathcal{M}_{H^\infty(\mathbb{D})}$ es la mínima topología en dicho espacio que hace continuas a las transformadas de Gelfand de cada $f \in H^\infty(\mathbb{D})$.

La Corona de $H^\infty(\mathbb{D})$ consiste en los caracteres de $H^\infty(\mathbb{D})$ que no pertenecen a la cerradura en la topología débil estrella de $\{\delta_x : x \in \mathbb{D}\}$.

El teorema de la Corona para las funciones holomorfas y acotadas en $\mathbb{D}$ afirma que la Corona de $H^\infty(\mathbb{D})$ es vacía (Carleson, 1962).

Problema de la Corona

Definición

Dada $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, su transformada de Gelfand está dada por

$$\hat{f} : \mathcal{M}_{H^\infty(\mathbb{D})} \to \mathbb{C}$$
$$\tau \mapsto \tau(f)$$

La topología débil estrella en $\mathcal{M}_{H^\infty(\mathbb{D})}$ es la mínima topología en dicho espacio que hace continuas a las transformadas de Gelfand de cada $f \in H^\infty(\mathbb{D})$.

La Corona de $H^\infty(\mathbb{D})$ consiste en los caracteres de $H^\infty(\mathbb{D})$ que no pertenecen a la cerradura en la topología débil estrella de $\{\delta_x : x \in \mathbb{D}\}$.

El teorema de la Corona para las funciones holomorfas y acotadas en $\mathbb{D}$ afirma que la Corona de $H^\infty(\mathbb{D})$ es vacía (Carleson, 1962).

Problema de la Corona y PPA

Es posible generalizar el problema de la Corona al álgebra de funciones holomorfas y acotadas sobre un dominio en $\mathbb{C}^n$ o incluso la bola B_X de un espacio de Banach X, pero no se conoce solución aún en el caso de que el espacio de Banach tenga dimensión finita mayor a uno.

Un problema más simple es el problema de puntos de adherencia que trata sobre el comportamiento a la frontera de funciones holomorfas y acotadas, el cual está resuelto en dimensión finita para dominios como un polidisco o dominios fuertemente pseudoconvexos con frontera suave, pero en dimensión infinita está abierto para el álgebra de funciones holomorfas y acotadas sobre la bola en un espacio de Banach excepto cuando el espacio de Banach consiste de las sucesiones que convergen a cero o de las funciones continuas sobre un compacto, Hausdorff y disperso.

Problema de la Corona y PPA

Es posible generalizar el problema de la Corona al álgebra de funciones holomorfas y acotadas sobre un dominio en $\mathbb{C}^n$ o incluso la bola B_X de un espacio de Banach X, pero no se conoce solución aún en el caso de que el espacio de Banach tenga dimensión finita mayor a uno.

Un problema más simple es el problema de puntos de adherencia que trata sobre el comportamiento a la frontera de funciones holomorfas y acotadas, el cual está resuelto en dimensión finita para dominios como un polidisco o dominios fuertemente pseudoconvexos con frontera suave, pero en dimensión infinita está abierto para el álgebra de funciones holomorfas y acotadas sobre la bola en un espacio de Banach excepto cuando el espacio de Banach consiste de las sucesiones que convergen a cero o de las funciones continuas sobre un compacto, Hausdorff y disperso.

Problema de la Corona y PPA

Es posible generalizar el problema de la Corona al álgebra de funciones holomorfas y acotadas sobre un dominio en $\mathbb{C}^n$ o incluso la bola B_X de un espacio de Banach X, pero no se conoce solución aún en el caso de que el espacio de Banach tenga dimensión finita mayor a uno.

Un problema más simple es el problema de puntos de adherencia que trata sobre el comportamiento a la frontera de funciones holomorfas y acotadas, el cual está resuelto en dimensión finita para dominios como un polidisco o dominios fuertemente pseudoconvexos con frontera suave, pero en dimensión infinita está abierto para el álgebra de funciones holomorfas y acotadas sobre la bola en un espacio de Banach excepto cuando el espacio de Banach consiste de las sucesiones que convergen a cero o de las funciones continuas sobre un compacto, Hausdorff y disperso.

Problema de la Corona y PPA

Es posible generalizar el problema de la Corona al álgebra de funciones holomorfas y acotadas sobre un dominio en $\mathbb{C}^n$ o incluso la bola B_X de un espacio de Banach X, pero no se conoce solución aún en el caso de que el espacio de Banach tenga dimensión finita mayor a uno.

Un problema más simple es el problema de puntos de adherencia que trata sobre el comportamiento a la frontera de funciones holomorfas y acotadas, el cual está resuelto en dimensión finita para dominios como un polidisco o dominios fuertemente pseudoconvexos con frontera suave, pero en dimensión infinita está abierto para el álgebra de funciones holomorfas y acotadas sobre la bola en un espacio de Banach excepto cuando el espacio de Banach consiste de las sucesiones que convergen a cero o de las funciones continuas sobre un compacto, Hausdorff y disperso.

Problema de la Corona y PPA

Es posible generalizar el problema de la Corona al álgebra de funciones holomorfas y acotadas sobre un dominio en $\mathbb{C}^n$ o incluso la bola B_X de un espacio de Banach X, pero no se conoce solución aún en el caso de que el espacio de Banach tenga dimensión finita mayor a uno.

Un problema más simple es el problema de puntos de adherencia que trata sobre el comportamiento a la frontera de funciones holomorfas y acotadas, el cual está resuelto en dimensión finita para dominios como un polidisco o dominios fuertemente pseudoconvexos con frontera suave, pero en dimensión infinita está abierto para el álgebra de funciones holomorfas y acotadas sobre la bola en un espacio de Banach excepto cuando el espacio de Banach consiste de las sucesiones que convergen a cero o de las funciones continuas sobre un compacto, Hausdorff y disperso.

PPA en $\mathbb{C}^n$

El problema de puntos de adherencia en $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ trata de lo siguiente:

Si definimos el conjunto de puntos de adherencia de $f \in H^\infty(\Omega)$ en $x_0 \in \overline{\Omega}$ como

$$Cl_\Omega(f, x_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ existe suc. } (x_n) \subset \Omega \text{ tal que } x_n \to x_0, f(x_n) \to \lambda\},$$

y si tomamos $A(\Omega)$ como el álgebra de funciones holomorfas sobre Ω que extienden continuamente a $\overline{\Omega}$ así como la función

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}_{H^\infty(\Omega)} &\to \mathcal{M}_{A(\Omega)} \\ \tau &\mapsto \tau\big|_{A(\Omega)} \end{aligned}$$

entonces definimos la fibra $\mathcal{M}_{x_0}$ en x_0 del espectro de $H^\infty(\Omega)$ como $\pi^{-1}(\delta_{x_0})$;de modo que el problema de puntos de adherencia pregunta si para cada $f \in H^\infty(\Omega)$ y cada $x_0 \in \overline{\Omega}$ se tiene que,

$$Cl_\Omega(f, x_0) = \hat{f}(\mathcal{M}_{x_0}).$$

PPA en $\mathbb{C}^n$

El problema de puntos de adherencia en $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ trata de lo siguiente:

Si definimos el conjunto de puntos de adherencia de $f \in H^\infty(\Omega)$ en $x_0 \in \overline{\Omega}$ como

$$Cl_\Omega(f, x_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ existe suc. } (x_n) \subset \Omega \text{ tal que } x_n \to x_0, f(x_n) \to \lambda\},$$

y si tomamos $A(\Omega)$ como el álgebra de funciones holomorfas sobre Ω que extienden continuamente a $\overline{\Omega}$ así como la función

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}_{H^\infty(\Omega)} &\to \mathcal{M}_{A(\Omega)} \\ \tau &\mapsto \tau\big|_{A(\Omega)} \end{aligned}$$

entonces definimos la fibra $\mathcal{M}_{x_0}$ en x_0 del espectro de $H^\infty(\Omega)$ como $\pi^{-1}(\delta_{x_0})$;de modo que el problema de puntos de adherencia pregunta si para cada $f \in H^\infty(\Omega)$ y cada $x_0 \in \overline{\Omega}$ se tiene que,

$$Cl_\Omega(f, x_0) = \hat{f}(\mathcal{M}_{x_0}).$$

PPA en $\mathbb{C}^n$

El problema de puntos de adherencia en $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ trata de lo siguiente:

Si definimos el conjunto de puntos de adherencia de $f \in H^\infty(\Omega)$ en $x_0 \in \overline{\Omega}$ como

$$Cl_\Omega(f, x_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ existe suc. } (x_n) \subset \Omega \text{ tal que } x_n \to x_0, f(x_n) \to \lambda\},$$

y si tomamos $A(\Omega)$ como el álgebra de funciones holomorfas sobre Ω que extienden continuamente a $\overline{\Omega}$ así como la función

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}_{H^\infty(\Omega)} &\to \mathcal{M}_{A(\Omega)} \\ \tau &\mapsto \tau|_{A(\Omega)} \end{aligned}$$

entonces definimos la fibra $\mathcal{M}_{x_0}$ en x_0 del espectro de $H^\infty(\Omega)$ como $\pi^{-1}(\delta_{x_0})$;de modo que el problema de puntos de adherencia pregunta si para cada $f \in H^\infty(\Omega)$ y cada $x_0 \in \overline{\Omega}$ se tiene que,

$$Cl_\Omega(f, x_0) = \hat{f}(\mathcal{M}_{x_0}).$$

PPA en $\mathbb{C}^n$

El problema de puntos de adherencia en $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ trata de lo siguiente:

Si definimos el conjunto de puntos de adherencia de $f \in H^\infty(\Omega)$ en $x_0 \in \overline{\Omega}$ como

$$Cl_\Omega(f, x_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ existe suc. } (x_n) \subset \Omega \text{ tal que } x_n \to x_0, f(x_n) \to \lambda\},$$

y si tomamos $A(\Omega)$ como el álgebra de funciones holomorfas sobre Ω que extienden continuamente a $\overline{\Omega}$ así como la función

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}_{H^\infty(\Omega)} &\to \mathcal{M}_{A(\Omega)} \\ \tau &\mapsto \tau|_{A(\Omega)} \end{aligned}$$

entonces definimos la fibra $\mathcal{M}_{x_0}$ en x_0 del espectro de $H^\infty(\Omega)$ como $\pi^{-1}(\delta_{x_0})$;de modo que el problema de puntos de adherencia pregunta si para cada $f \in H^\infty(\Omega)$ y cada $x_0 \in \overline{\Omega}$ se tiene que,

$$Cl_\Omega(f, x_0) = \hat{f}(\mathcal{M}_{x_0}).$$

PPA en EB: Funciones holomorfas

En un espacio de Banach, un polinomio m-homogéneo es la restricción a la diagonal de una función m-lineal:

$$P(x) = A(x, \cdots, x)$$

donde $A : X^m \to \mathbb{C}$ es lineal en cada una de sus m entradas.

Una serie de potencias es una serie formal de polinomios m-homogéneos:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)$$

donde P_m es un polinomio m-homogéneo.

PPA en EB: Funciones holomorfas

En un espacio de Banach, un polinomio m-homogéneo es la restricción a la diagonal de una función m-lineal:

$$P(x) = A(x, \cdots, x)$$

donde $A : X^m \to \mathbb{C}$ es lineal en cada una de sus m entradas.

Una serie de potencias es una serie formal de polinomios m-homogéneos:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)$$

donde P_m es un polinomio m-homogéneo.

PPA en EB: Funciones holomorfas

En un espacio de Banach, un polinomio m-homogéneo es la restricción a la diagonal de una función m-lineal:

$$P(x) = A(x, \cdots, x)$$

donde $A : X^m \to \mathbb{C}$ es lineal en cada una de sus m entradas.

Una serie de potencias es una serie formal de polinomios m-homogéneos:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)$$

donde P_m es un polinomio m-homogéneo.

PPA en EB: Funciones holomorfas

En un espacio de Banach, un polinomio m-homogéneo es la restricción a la diagonal de una función m-lineal:

$$P(x) = A(x, \cdots, x)$$

donde $A : X^m \to \mathbb{C}$ es lineal en cada una de sus m entradas.

Una serie de potencias es una serie formal de polinomios m-homogéneos:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)$$

donde P_m es un polinomio m-homogéneo.

PPA en EB: Funciones holomorfas

Una función holomorfa sobre un dominio en un espacio de Banach es una función tal que alrededor de cada punto del dominio se puede expresar como serie de potencias de polinomios continuos, convergiendo uniformemente en una bola alrededor de dicho punto:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$$

Es de interés estudiar las funciones holomorfas y acotadas sobre la bola abierta unitaria de un espacio de Banach pues dichas funciones forman un álgebra de Banach.

PPA en EB: Funciones holomorfas

Una función holomorfa sobre un dominio en un espacio de Banach es una función tal que alrededor de cada punto del dominio se puede expresar como serie de potencias de polinomios continuos, convergiendo uniformemente en una bola alrededor de dicho punto:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$$

Es de interés estudiar las funciones holomorfas y acotadas sobre la bola abierta unitaria de un espacio de Banach pues dichas funciones forman un álgebra de Banach.

PPA en EB: Funciones holomorfas

Una función holomorfa sobre un dominio en un espacio de Banach es una función tal que alrededor de cada punto del dominio se puede expresar como serie de potencias de polinomios continuos, convergiendo uniformemente en una bola alrededor de dicho punto:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$$

Es de interés estudiar las funciones holomorfas y acotadas sobre la bola abierta unitaria de un espacio de Banach pues dichas funciones forman un álgebra de Banach.

PPA en EB: Topologías débiles

Dado X un espacio de Banach, X^* representa su dual topológico: las funciones lineales y continuas de X en $\mathbb{C}$.

Hay una inyección canónica de un espacio de Banach X en su doble dual X^{**}:

$$x \mapsto j(x) \text{ dada por } j(x)(x^*) = x^*(x).$$

Sobre un espacio de Banach X, la topología débil $\omega(X, X^*)$ es la mínima topología en X que hace continuos a los elementos del dual X^*.

Si X^* es un espacio dual, la topología débil estrella $\omega(X^*, X)$ es la mínima topología en X^* que hace continuos a los elementos de $j(X)$.

Dado X un espacio de Banach, X^* representa su dual topológico: las funciones lineales y continuas de X en $\mathbb{C}$.

Hay una inyección canónica de un espacio de Banach X en su doble dual X^{**}:

$$x \mapsto j(x) \text{ dada por } j(x)(x^*) = x^*(x).$$

Sobre un espacio de Banach X, la topología débil $\omega(X, X^*)$ es la mínima topología en X que hace continuos a los elementos del dual X^*.

Si X^* es un espacio dual, la topología débil estrella $\omega(X^*, X)$ es la mínima topología en X^* que hace continuos a los elementos de $j(X)$.

PPA en EB: Topologías débiles

Dado X un espacio de Banach, X^* representa su dual topológico: las funciones lineales y continuas de X en $\mathbb{C}$.

Hay una inyección canónica de un espacio de Banach X en su doble dual X^{**}:

$$x \mapsto j(x) \text{ dada por } j(x)(x^*) = x^*(x).$$

Sobre un espacio de Banach X, la topología débil $\omega(X, X^*)$ es la mínima topología en X que hace continuos a los elementos del dual X^*.

Si X^* es un espacio dual, la topología débil estrella $\omega(X^*, X)$ es la mínima topología en X^* que hace continuos a los elementos de $j(X)$.

PPA en EB: Topologías débiles

Dado X un espacio de Banach, X^* representa su dual topológico: las funciones lineales y continuas de X en $\mathbb{C}$.

Hay una inyección canónica de un espacio de Banach X en su doble dual X^{**}:

$$x \mapsto j(x) \text{ dada por } j(x)(x^*) = x^*(x).$$

Sobre un espacio de Banach X, la topología débil $\omega(X, X^*)$ es la mínima topología en X que hace continuos a los elementos del dual X^*.

Si X^* es un espacio dual, la topología débil estrella $\omega(X^*, X)$ es la mínima topología en X^* que hace continuos a los elementos de $j(X)$.

PPA en EB: Topologías débiles

Dado X un espacio de Banach, X^* representa su dual topológico: las funciones lineales y continuas de X en $\mathbb{C}$.

Hay una inyección canónica de un espacio de Banach X en su doble dual X^{**}:

$$x \mapsto j(x) \text{ dada por } j(x)(x^*) = x^*(x).$$

Sobre un espacio de Banach X, la topología débil $\omega(X, X^*)$ es la mínima topología en X que hace continuos a los elementos del dual X^*.

Si X^* es un espacio dual, la topología débil estrella $\omega(X^*, X)$ es la mínima topología en X^* que hace continuos a los elementos de $j(X)$.

PPA en EB: Topologías débiles

Dado X un espacio de Banach, X^* representa su dual topológico: las funciones lineales y continuas de X en $\mathbb{C}$.

Hay una inyección canónica de un espacio de Banach X en su doble dual X^{**}:

$$x \mapsto j(x) \text{ dada por } j(x)(x^*) = x^*(x).$$

Sobre un espacio de Banach X, la topología débil $\omega(X, X^*)$ es la mínima topología en X que hace continuos a los elementos del dual X^*.

Si X^* es un espacio dual, la topología débil estrella $\omega(X^*, X)$ es la mínima topología en X^* que hace continuos a los elementos de $j(X)$.

Definición

Diremos que I un conjunto parcialmente ordenado no vacío es un conjunto dirigido si para todos $a, b \in I$ existe $c \in I$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$.

Sean I un conjunto dirigido y Ω un espacio topológico. A una función $f : I \to X$ la llamaremos una red, y la denotamos por $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Diremos que $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una red convergente a $x \in \Omega$ si para toda vecindad U de x existe α_0 tal que $x_\alpha \in U$ siempre que $\alpha \geq \alpha_0$.

Definición

Diremos que I un conjunto parcialmente ordenado no vacío es un conjunto dirigido si para todos $a, b \in I$ existe $c \in I$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$.

Sean I un conjunto dirigido y Ω un espacio topológico. A una función $f : I \to X$ la llamaremos una red, y la denotamos por $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Diremos que $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una red convergente a $x \in \Omega$ si para toda vecindad U de x existe α_0 tal que $x_\alpha \in U$ siempre que $\alpha \geq \alpha_0$.

PPA en EB: Redes

Definición

Diremos que I un conjunto parcialmente ordenado no vacío es un conjunto dirigido si para todos $a, b \in I$ existe $c \in I$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$.

Sean I un conjunto dirigido y Ω un espacio topológico. A una función $f : I \to X$ la llamaremos una red, y la denotamos por $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Diremos que $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una red convergente a $x \in \Omega$ si para toda vecindad U de x existe α_0 tal que $x_\alpha \in U$ siempre que $\alpha \geq \alpha_0$.

PPA en EB

En el contexto de espacios de Banach, definamos el conjunto de puntos de adherencia de $f \in H^\infty(B_X)$ en $x_0 \in \overline{B}_{X^{**}}$ como

$$Cl_{B_X}(f, x_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ existe red } (x_\alpha) \subset B_X \text{ tal que } x_\alpha \xrightarrow{w^*} x_0, f(x_\alpha) \to \lambda\}$$

y la fibra $\mathcal{M}_{x_0}$ de $H^\infty(B_X)$ en $x_0 \in \overline{B}_{X^{**}}$ como la imagen inversa de x_0 bajo

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}_{H^\infty(B_X)} &\to \overline{B}_{X^{**}} \\ \tau &\mapsto \tau|_{X^*} \end{aligned}$$

entonces el problema de puntos de adherencia para $H^\infty(B_X)$ pregunta si para todo $f \in H^\infty(B_X)$ se tiene que

$$Cl_{B_X}(f, x_0) = \hat{f}(\mathcal{M}_{x_0}).$$

PPA

Soluciones:

- Polidiscos en $\mathbb{C}^n$,
- Dominios fuertemente pseudoconvexos en $\mathbb{C}^n$,
- El espacio de sucesiones que convergen a cero,
- Espacios de Hilbert para el álgebra de funciones holomorfas y uniformemente continuas,
- El espacio de funciones continuas sobre K para K compacto, Hausdorff y disperso,

Reducciones:

- Para $X = C(K)$ con K cualquier compacto y Hausdorff, basta probar el PPA en el origen y en la esfera del doble dual,
- Para probar el PPA en todo espacio de Banach, basta probarlo para espacios que son 1-suma de espacios de dimensión finita.

PPA

Soluciones:

- Polidiscos en $\mathbb{C}^n$,
- Dominios fuertemente pseudoconvexos en $\mathbb{C}^n$,
- El espacio de sucesiones que convergen a cero,
- Espacios de Hilbert para el álgebra de funciones holomorfas y uniformemente continuas,
- El espacio de funciones continuas sobre K para K compacto, Hausdorff y disperso,

Reducciones:

- Para $X = C(K)$ con K cualquier compacto y Hausdorff, basta probar el PPA en el origen y en la esfera del doble dual,
- Para probar el PPA en todo espacio de Banach, basta probarlo para espacios que son 1-suma de espacios de dimensión finita.

PPA

Soluciones:

- Polidiscos en $\mathbb{C}^n$,
- Dominios fuertemente pseudoconvexos en $\mathbb{C}^n$,
- El espacio de sucesiones que convergen a cero,
- Espacios de Hilbert para el álgebra de funciones holomorfas y uniformemente continuas,
- El espacio de funciones continuas sobre K para K compacto, Hausdorff y disperso,

Reducciones:

- Para $X = C(K)$ con K cualquier compacto y Hausdorff, basta probar el PPA en el origen y en la esfera del doble dual,
- Para probar el PPA en todo espacio de Banach, basta probarlo para espacios que son 1-suma de espacios de dimensión finita.

PPA

Soluciones:

- Polidiscos en $\mathbb{C}^n$,
- Dominios fuertemente pseudoconvexos en $\mathbb{C}^n$,
- El espacio de sucesiones que convergen a cero,
- Espacios de Hilbert para el álgebra de funciones holomorfas y uniformemente continuas,
- El espacio de funciones continuas sobre K para K compacto, Hausdorff y disperso,

Reducciones:

- Para $X = C(K)$ con K cualquier compacto y Hausdorff, basta probar el PPA en el origen y en la esfera del doble dual,
- Para probar el PPA en todo espacio de Banach, basta probarlo para espacios que son 1-suma de espacios de dimensión finita.

PPA

Soluciones:

- Polidiscos en $\mathbb{C}^n$,
- Dominios fuertemente pseudoconvexos en $\mathbb{C}^n$,
- El espacio de sucesiones que convergen a cero,
- Espacios de Hilbert para el álgebra de funciones holomorfas y uniformemente continuas,
- El espacio de funciones continuas sobre K para K compacto, Hausdorff y disperso,

Reducciones:

- Para $X = C(K)$ con K cualquier compacto y Hausdorff, basta probar el PPA en el origen y en la esfera del doble dual,
- Para probar el PPA en todo espacio de Banach, basta probarlo para espacios que son 1-suma de espacios de dimensión finita.

PPA

Soluciones:

- Polidiscos en $\mathbb{C}^n$,
- Dominios fuertemente pseudoconvexos en $\mathbb{C}^n$,
- El espacio de sucesiones que convergen a cero,
- Espacios de Hilbert para el álgebra de funciones holomorfas y uniformemente continuas,
- El espacio de funciones continuas sobre K para K compacto, Hausdorff y disperso,

Reducciones:

- Para $X = C(K)$ con K cualquier compacto y Hausdorff, basta probar el PPA en el origen y en la esfera del doble dual,
- Para probar el PPA en todo espacio de Banach, basta probarlo para espacios que son 1-suma de espacios de dimensión finita.

PPA

Soluciones:

- Polidiscos en $\mathbb{C}^n$,
- Dominios fuertemente pseudoconvexos en $\mathbb{C}^n$,
- El espacio de sucesiones que convergen a cero,
- Espacios de Hilbert para el álgebra de funciones holomorfas y uniformemente continuas,
- El espacio de funciones continuas sobre K para K compacto, Hausdorff y disperso,

Reducciones:

- Para $X = C(K)$ con K cualquier compacto y Hausdorff, basta probar el PPA en el origen y en la esfera del doble dual,
- Para probar el PPA en todo espacio de Banach, basta probarlo para espacios que son 1-suma de espacios de dimensión finita.

PPA

Soluciones:

- Polidiscos en $\mathbb{C}^n$,
- Dominios fuertemente pseudoconvexos en $\mathbb{C}^n$,
- El espacio de sucesiones que convergen a cero,
- Espacios de Hilbert para el álgebra de funciones holomorfas y uniformemente continuas,
- El espacio de funciones continuas sobre K para K compacto, Hausdorff y disperso,

Reducciones:

- Para $X = C(K)$ con K cualquier compacto y Hausdorff, basta probar el PPA en el origen y en la esfera del doble dual,
- Para probar el PPA en todo espacio de Banach, basta probarlo para espacios que son 1-suma de espacios de dimensión finita.

PPA

Soluciones:

- Polidiscos en $\mathbb{C}^n$,
- Dominios fuertemente pseudoconvexos en $\mathbb{C}^n$,
- El espacio de sucesiones que convergen a cero,
- Espacios de Hilbert para el álgebra de funciones holomorfas y uniformemente continuas,
- El espacio de funciones continuas sobre K para K compacto, Hausdorff y disperso,

Reducciones:

- Para $X = C(K)$ con K cualquier compacto y Hausdorff, basta probar el PPA en el origen y en la esfera del doble dual,
- Para probar el PPA en todo espacio de Banach, basta probarlo para espacios que son 1-suma de espacios de dimensión finita.

PPPA

El problema polinomial de puntos de adherencia (PPPA) es tan válido de estudiar como el problema de puntos de adherencia original (PPA), pues muchos de los resultados que son conocidos para el PPA original aún se valen para el PPPA, mientras que la topología con la que se trabaja es intermedia entre la débil estrella y la de la norma.

Dado X un espacio de Banach, la topología polinomial estrella $\sigma(X^{**}, P(X))$ es la mínima topología en X^{**} que hace continuas a las extensiones de Aron-Berner $\tilde{P}$ de cada polinomio continuo P en X a X^{**}. Un polinomio continuo m-homogéneo es la restricción a la diagonal de una función m-lineal y continua, y un polinomio continuo es la combinación lineal de polinomios homogéneos de diferentes grados.

PPPA

El problema polinomial de puntos de adherencia (PPPA) es tan válido de estudiar como el problema de puntos de adherencia original (PPA), pues muchos de los resultados que son conocidos para el PPA original aún se valen para el PPPA, mientras que la topología con la que se trabaja es intermedia entre la débil estrella y la de la norma.

Dado X un espacio de Banach, la topología polinomial estrella $\sigma(X^{**}, P(X))$ es la mínima topología en X^{**} que hace continuas a las extensiones de Aron-Berner $\tilde{P}$ de cada polinomio continuo P en X a X^{**}. Un polinomio continuo m-homogéneo es la restricción a la diagonal de una función m-lineal y continua, y un polinomio continuo es la combinación lineal de polinomios homogéneos de diferentes grados.

PPPA

El problema polinomial de puntos de adherencia (PPPA) es tan válido de estudiar como el problema de puntos de adherencia original (PPA), pues muchos de los resultados que son conocidos para el PPA original aún se valen para el PPPA, mientras que la topología con la que se trabaja es intermedia entre la débil estrella y la de la norma.

Dado X un espacio de Banach, la topología polinomial estrella $\sigma(X^{**}, P(X))$ es la mínima topología en X^{**} que hace continuas a las extensiones de Aron-Berner $\tilde{P}$ de cada polinomio continuo P en X a X^{**}. Un polinomio continuo m-homogéneo es la restricción a la diagonal de una función m-lineal y continua, y un polinomio continuo es la combinación lineal de polinomios homogéneos de diferentes grados.

PPPA

La extensión de Aron-Berner de un polinomio homogéneo está basada en la extensión de Arens de un mapeo multilineal simétrico, que consiste en extender por continuidad débil estrella variable por variable. El mapeo resultante extendido depende del orden en que las variables se extendieron pero en la diagonal es único.

Definimos el conjunto de puntos de adherencia polinomial de $f \in H^{\infty}(B_X)$ en x_0 como

$$Cl^{\mathcal{P}}_{B_X}(f, x_0) = \{\lambda : \text{ existe}(x_\alpha) \subset B_X \text{ tal que } x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X^{**},\mathcal{P}(X))} x_0, f(x_\alpha) \to \lambda\}$$

y la fibra polinomial $\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{x_0}$ de $\mathcal{M}_{H^\infty(B_X)}$ en x_0 como $(\pi^{\mathcal{P}})^{-1}(\delta_{x_0})$ para

$$\begin{aligned} \pi^{\mathcal{P}} : \mathcal{M}_{H^\infty(B_X)} &\to \mathcal{M}_{A_u(B_X)} \\ \tau &\mapsto \tau|_{A_u(B_X)} \end{aligned}$$

donde $A_u(B_X)$ consiste de las funciones holomorfas y uniformemente continuas sobre B_X.

PPPA

La extensión de Aron-Berner de un polinomio homogéneo está basada en la extensión de Arens de un mapeo multilineal simétrico, que consiste en extender por continuidad débil estrella variable por variable. El mapeo resultante extendido depende del orden en que las variables se extendieron pero en la diagonal es único.

Definimos el conjunto de puntos de adherencia polinomial de $f \in H^\infty(B_X)$ en x_0 como

$$Cl^{\mathcal{P}}_{B_X}(f, x_0) = \{\lambda : \text{ existe}(x_\alpha) \subset B_X \text{ tal que } x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X^{**}, \mathcal{P}(X))} x_0, f(x_\alpha) \to \lambda\}$$

y la fibra polinomial $\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{x_0}$ de $\mathcal{M}_{H^\infty(B_X)}$ en x_0 como $(\pi^{\mathcal{P}})^{-1}(\delta_{x_0})$ para

$$\begin{aligned} \pi^{\mathcal{P}} : \mathcal{M}_{H^\infty(B_X)} &\to \mathcal{M}_{A_u(B_X)} \\ \tau &\mapsto \tau|_{A_u(B_X)} \end{aligned}$$

donde $A_u(B_X)$ consiste de las funciones holomorfas y uniformemente continuas sobre B_X.

La extensión de Aron-Berner de un polinomio homogéneo está basada en la extensión de Arens de un mapeo multilineal simétrico, que consiste en extender por continuidad débil estrella variable por variable. El mapeo resultante extendido depende del orden en que las variables se extendieron pero en la diagonal es único.

Definimos el conjunto de puntos de adherencia polinomial de $f \in H^\infty(B_X)$ en x_0 como

$$Cl^{\mathcal{P}}_{B_X}(f, x_0) = \{\lambda : \text{ existe}(x_\alpha) \subset B_X \text{ tal que } x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X^{**}, \mathcal{P}(X))} x_0, f(x_\alpha) \to \lambda\}$$

y la fibra polinomial $\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{x_0}$ de $\mathcal{M}_{H^\infty(B_X)}$ en x_0 como $(\pi^{\mathcal{P}})^{-1}(\delta_{x_0})$ para

$$\pi^{\mathcal{P}} : \mathcal{M}_{H^\infty(B_X)} \to \mathcal{M}_{A_u(B_X)}$$
$$\tau \mapsto \tau|_{A_u(B_X)}$$

donde $A_u(B_X)$ consiste de las funciones holomorfas y uniformemente continuas sobre B_X.

PPPA

La extensión de Aron-Berner de un polinomio homogéneo está basada en la extensión de Arens de un mapeo multilineal simétrico, que consiste en extender por continuidad débil estrella variable por variable. El mapeo resultante extendido depende del orden en que las variables se extendieron pero en la diagonal es único.

Definimos el conjunto de puntos de adherencia polinomial de $f \in H^\infty(B_X)$ en x_0 como

$$Cl^{\mathcal{P}}_{B_X}(f, x_0) = \{\lambda : \text{ existe}(x_\alpha) \subset B_X \text{ tal que } x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X^{**}, \mathcal{P}(X))} x_0, f(x_\alpha) \to \lambda\}$$

y la fibra polinomial $\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{x_0}$ de $\mathcal{M}_{H^\infty(B_X)}$ en x_0 como $(\pi^{\mathcal{P}})^{-1}(\delta_{x_0})$ para

$$\begin{aligned} \pi^{\mathcal{P}} : \mathcal{M}_{H^\infty(B_X)} &\to \mathcal{M}_{A_u(B_X)} \\ \tau &\mapsto \tau|_{A_u(B_X)} \end{aligned}$$

donde $A_u(B_X)$ consiste de las funciones holomorfas y uniformemente continuas sobre B_X.

PPPA

La extensión de Aron-Berner de un polinomio homogéneo está basada en la extensión de Arens de un mapeo multilineal simétrico, que consiste en extender por continuidad débil estrella variable por variable. El mapeo resultante extendido depende del orden en que las variables se extendieron pero en la diagonal es único.

Definimos el conjunto de puntos de adherencia polinomial de $f \in H^\infty(B_X)$ en x_0 como

$$Cl^{\mathcal{P}}_{B_X}(f, x_0) = \{\lambda : \text{ existe}(x_\alpha) \subset B_X \text{ tal que } x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X^{**}, \mathcal{P}(X))} x_0, f(x_\alpha) \to \lambda\}$$

y la fibra polinomial $\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{x_0}$ de $\mathcal{M}_{H^\infty(B_X)}$ en x_0 como $(\pi^{\mathcal{P}})^{-1}(\delta_{x_0})$ para

$$\begin{aligned} \pi^{\mathcal{P}} : \mathcal{M}_{H^\infty(B_X)} &\to \mathcal{M}_{A_u(B_X)} \\ \tau &\mapsto \tau|_{A_u(B_X)} \end{aligned}$$

donde $A_u(B_X)$ consiste de las funciones holomorfas y uniformemente continuas sobre B_X.

PPPA

La extensión de Aron-Berner de un polinomio homogéneo está basada en la extensión de Arens de un mapeo multilineal simétrico, que consiste en extender por continuidad débil estrella variable por variable. El mapeo resultante extendido depende del orden en que las variables se extendieron pero en la diagonal es único.

Definimos el conjunto de puntos de adherencia polinomial de $f \in H^\infty(B_X)$ en x_0 como

$$Cl^{\mathcal{P}}_{B_X}(f, x_0) = \{\lambda : \text{ existe}(x_\alpha) \subset B_X \text{ tal que } x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X^{**}, \mathcal{P}(X))} x_0, f(x_\alpha) \to \lambda\}$$

y la fibra polinomial $\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{x_0}$ de $\mathcal{M}_{H^\infty(B_X)}$ en x_0 como $(\pi^{\mathcal{P}})^{-1}(\delta_{x_0})$ para

$$\begin{aligned} \pi^{\mathcal{P}} : \mathcal{M}_{H^\infty(B_X)} &\to \mathcal{M}_{A_u(B_X)} \\ \tau &\mapsto \tau|_{A_u(B_X)} \end{aligned}$$

donde $A_u(B_X)$ consiste de las funciones holomorfas y uniformemente continuas sobre B_X.

PPPA

El problema polinomial de puntos de adherencia pregunta si para toda función $f \in H^\infty(B_X)$ y todo elemento $x_0 \in \bar{B}_{X^{**}}$ tenemos

$$Cl_{B_X}^{\mathcal{P}}(f, x_0) = \hat{f}(\mathcal{M}_{x_0}^{\mathcal{P}}).$$

Observación

Para algunos espacios X se tiene que el álgebra $A_u(B_X)$ coincide con $A(B_X)$, el álgebra cerrada generada por los elementos de X^* restringidos a B_X. Por ejemplo esto sucede para espacios de dimensión finita y para c_0. En tal caso, el PPA es equivalente al PPPA.

Observación

Para $X = C(K)$ con K compacto y Hausdorff, $A_u(B_X) = A(B_X)$ ssi K es disperso.

PPPA

El problema polinomial de puntos de adherencia pregunta si para toda función $f \in H^\infty(B_X)$ y todo elemento $x_0 \in \bar{B}_{X^{**}}$ tenemos

$$Cl^{\mathcal{P}}_{B_X}(f, x_0) = \hat{f}(\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{x_0}).$$

Observación

Para algunos espacios X se tiene que el álgebra $A_u(B_X)$ coincide con $A(B_X)$, el álgebra cerrada generada por los elementos de X^* restringidos a B_X. Por ejemplo esto sucede para espacios de dimensión finita y para c_0. En tal caso, el PPA es equivalente al PPPA.

Observación

Para $X = C(K)$ con K compacto y Hausdorff, $A_u(B_X) = A(B_X)$ ssi K es disperso.

PPPA

El problema polinomial de puntos de adherencia pregunta si para toda función $f \in H^\infty(B_X)$ y todo elemento $x_0 \in \bar{B}_{X^{**}}$ tenemos

$$Cl^{\mathcal{P}}_{B_X}(f, x_0) = \hat{f}(\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{x_0}).$$

Observación

Para algunos espacios X se tiene que el álgebra $A_u(B_X)$ coincide con $A(B_X)$, el álgebra cerrada generada por los elementos de X^* restringidos a B_X. Por ejemplo esto sucede para espacios de dimensión finita y para c_0. En tal caso, el PPA es equivalente al PPPA.

Observación

Para $X = C(K)$ con K compacto y Hausdorff, $A_u(B_X) = A(B_X)$ ssi K es disperso.

El problema polinomial de puntos de adherencia pregunta si para toda función $f \in H^\infty(B_X)$ y todo elemento $x_0 \in \bar{B}_{X^{**}}$ tenemos

$$Cl^{\mathcal{P}}_{B_X}(f, x_0) = \hat{f}(\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{x_0}).$$

Observación

Para algunos espacios X se tiene que el álgebra $A_u(B_X)$ coincide con $A(B_X)$, el álgebra cerrada generada por los elementos de X^* restringidos a B_X. Por ejemplo esto sucede para espacios de dimensión finita y para c_0. En tal caso, el PPA es equivalente al PPPA.

Observación

Para $X = C(K)$ con K compacto y Hausdorff, $A_u(B_X) = A(B_X)$ ssi K es disperso.

PPPA

En el caso de que K es compacto, Hausdorff y no disperso, el PPPA para $H^\infty(B_{C(K)})$ se reduce a checar si se vale en el origen y en puntos de la esfera de $C(K)^{**}$. Y el PPPA para $A_\infty(B_{C(K)})$, el álgebra de funciones holomorfas en $B_{C(K)}$ que extienden continuamente a $\bar{B}_{C(K)}$, se reduce a checar si se vale en el origen, en puntos en la esfera de $C(K)$ y en elementos de $\bar{B}_{C(K)^{**}} \setminus \bar{B}_{C(K)}$.

Además tenemos teoremas (polinomiales) de puntos de adherencia en puntos de la esfera de ℓ_1 para el álgebra $A_\infty(B_{\ell_1})$ y para $A_\infty(B_X)$ en puntos de convexidad uniforme local de la esfera de X.

PPPA

En el caso de que K es compacto, Hausdorff y no disperso, el PPPA para $H^\infty(B_{C(K)})$ se reduce a checar si se vale en el origen y en puntos de la esfera de $C(K)^{**}$. Y el PPPA para $A_\infty(B_{C(K)})$, el álgebra de funciones holomorfas en $B_{C(K)}$ que extienden continuamente a $\bar{B}_{C(K)}$, se reduce a checar si se vale en el origen, en puntos en la esfera de $C(K)$ y en elementos de $\bar{B}_{C(K)^{**}} \setminus \bar{B}_{C(K)}$.

Además tenemos teoremas (polinomiales) de puntos de adherencia en puntos de la esfera de ℓ_1 para el álgebra $A_\infty(B_{\ell_1})$ y para $A_\infty(B_X)$ en puntos de convexidad uniforme local de la esfera de X.

PPPA

En el caso de que K es compacto, Hausdorff y no disperso, el PPPA para $H^\infty(B_{C(K)})$ se reduce a checar si se vale en el origen y en puntos de la esfera de $C(K)^{**}$. Y el PPPA para $A_\infty(B_{C(K)})$, el álgebra de funciones holomorfas en $B_{C(K)}$ que extienden continuamente a $\bar{B}_{C(K)}$, se reduce a checar si se vale en el origen, en puntos en la esfera de $C(K)$ y en elementos de $\bar{B}_{C(K)^{**}} \setminus \bar{B}_{C(K)}$.

Además tenemos teoremas (polinomiales) de puntos de adherencia en puntos de la esfera de ℓ_1 para el álgebra $A_\infty(B_{\ell_1})$ y para $A_\infty(B_X)$ en puntos de convexidad uniforme local de la esfera de X.

PPPA

En el caso de que K es compacto, Hausdorff y no disperso, el PPPA para $H^\infty(B_{C(K)})$ se reduce a checar si se vale en el origen y en puntos de la esfera de $C(K)^{**}$. Y el PPPA para $A_\infty(B_{C(K)})$, el álgebra de funciones holomorfas en $B_{C(K)}$ que extienden continuamente a $\bar{B}_{C(K)}$, se reduce a checar si se vale en el origen, en puntos en la esfera de $C(K)$ y en elementos de $\bar{B}_{C(K)^{**}} \setminus \bar{B}_{C(K)}$.

Además tenemos teoremas (polinomiales) de puntos de adherencia en puntos de la esfera de ℓ_1 para el álgebra $A_\infty(B_{\ell_1})$ y para $A_\infty(B_X)$ en puntos de convexidad uniforme local de la esfera de X.

PPPA

El PPPA está abierto para $H^\infty(B_X)$ cuando $A(B_X) \subsetneq A_u(B_X)$. Sin embargo, se tiene lo siguiente:

Teorema

Para probar el PPPA en $H^\infty(B_X)$ cuando X es un espacio de Banach separable, basta probarlo para espacios que son 1-suma de espacios de dimensión finita.

PPPA

El PPPA está abierto para $H^\infty(B_X)$ cuando $A(B_X) \subsetneq A_u(B_X)$. Sin embargo, se tiene lo siguiente:

Teorema

Para probar el PPPA en $H^\infty(B_X)$ cuando X es un espacio de Banach separable, basta probarlo para espacios que son 1-suma de espacios de dimensión finita.

Bosquejo de la prueba:

Lema (1)

Sea Y un espacio de Banach separable y $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset \dots$ una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita cuya unión es densa en Y. Toma $X = (\sum Y_n)_1$. Entonces el mapeo cociente isométrico $Q : X \to Y$ definido por

$$Q(z_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

induce un isomorfismo de álgebra isométrico $Q^{\#} : H^{\infty}(B_Y) \to H^{\infty}(B_X)$ de forma que $Q^{\#}(A_u(B_Y)) \subset A_u(B_X)$.

Bosquejo de la prueba:

Lema (1)

Sea Y un espacio de Banach separable y $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset \ldots$ una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita cuya unión es densa en Y. Toma $X = (\sum Y_n)_1$. Entonces el mapeo cociente isométrico $Q : X \to Y$ definido por

$$Q(z_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

induce un isomorfismo de álgebra isométrico $Q^{\#} : H^{\infty}(B_Y) \to H^{\infty}(B_X)$ de forma que $Q^{\#}(A_u(B_Y)) \subset A_u(B_X)$.

PPPA

Definamos $S : X^* \to Y^*$ densamente: para $y \in \cup_k Y_k$ sea $S_n(y) = (z_i)_i \in X$ dada por

$$z_i = \begin{cases} y, & \text{si } i = n \text{ y } y \in Y_n \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

luego, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre sobre $\mathbb{N}$ consideremos para $x^* \in X^*$ $S(x^*)(y) = \lim_{n \in \mathcal{U}} x^*(S_n(y))$ y obtenemos que S tiene norma acotada por 1.

Definamos $S : X^* \to Y^*$ densamente: para $y \in \cup_k Y_k$ sea $S_n(y) = (z_i)_i \in X$ dada por

$$z_i = \begin{cases} y, & \text{si } i = n \text{ y } y \in Y_n \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

luego, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre sobre $\mathbb{N}$ consideremos para $x^* \in X^*$ $S(x^*)(y) = \lim_{n \in \mathcal{U}} x^*(S_n(y))$ y obtenemos que S tiene norma acotada por 1.

Para cada $f \in H^\infty(B_X)$ sea $\tilde{f} \in H^\infty(B_{X^{**}})$ su extensión de Aron-Berner.

Lema (2)

Bajo los supuestos del lema anterior, la función

$$\begin{aligned} T : H^\infty(B_X) &\to H^\infty(B_Y) \\ f &\mapsto \tilde{f} \circ S^*|_Y \end{aligned}$$

es un homomorfismo de álgebra de norma uno tal que $T(X^*) \subset Y^*$, $T(A_u(B_X)) \subset A_u(B_Y)$ y $T \circ Q^\# = I_{H^\infty(B_Y)}$.

Para cada $f \in H^\infty(B_X)$ sea $\tilde{f} \in H^\infty(B_{X^{**}})$ su extensión de Aron-Berner.

Lema (2)

Bajo los supuestos del lema anterior, la función

$$\begin{aligned} T : H^\infty(B_X) &\to H^\infty(B_Y) \\ f &\mapsto \tilde{f} \circ S^*|_Y \end{aligned}$$

es un homomorfismo de álgebra de norma uno tal que $T(X^*) \subset Y^*$, $T(A_u(B_X)) \subset A_u(B_Y)$ y $T \circ Q^\# = I_{H^\infty(B_Y)}$.

W. B. Johnson, S. Ortega Castillo, *The cluster value problem for Banach spaces*, Illinois Journal of Mathematics, Volume 58, Number 2, Summer 2014, Pages 405 –412.

S. Ortega Castillo, Á. Prieto, *The polynomial cluster value problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 461, 2018, Pages 1459 – 1470.

Agradecimiento

¡GRACIAS!